

目 录

第〇章 预备知识	1
归纳法	1
绝对值与不等式	2
第一章 函数	3
函数概念	3
函数的几种特性	5
复合函数与反函数	7
第二章 极限	10
序列极限定义	10
序列极限的性质与运算	12
确界与单调有界序列	14
函数极限	17
函数极限概念的推广	18
两个重要极限	20
无穷小量的阶及无穷大量的阶的比较	21
用肯定语气叙述极限不存在	22
第三章 连续	23
连续与间断	23
连续函数的运算	25
中间值性质	26
初等函数的连续性	27
最大、最小值	27
一致连续性	28
第四章 导数与微分	32
导数概念	32
导数的几何意义与极值	34
导数的四则运算	35

复合函数求导	37
反函数与参数表示的函数求导	39
微分	41
高阶导数与高阶微分	43
第五章 利用导数研究函数	47
罗尔中值定理	47
拉格朗日中值定理	49
哥西中值定理	51
洛必达法则	52
皮亚诺余项的泰勒公式	54
拉格朗日余项的泰勒公式	56
函数的升降与极值	58
函数的凹凸与拐点	62
函数作图	64
方程求根	65
第六章 不定积分	67
原函数与不定积分	67
不定积分的线性性质	68
第一换元法	69
第二换元法	71
分部积分法	71
有理函数的积分	72
三角函数有理式的积分	73
无理函数的积分	74
第七章 定积分	75
定积分概念	75
微积分基本定理	77
可积函数	78
定积分性质	80
变限定积分	81
换元法	86

分部积分法·····	89
积分第二中值定理·····	92
近似计算·····	94
第八章 定积分应用 ·····	99
平面图形的面积·····	99
由截平面的面积求体积·····	100
平面曲线的弧长与曲率·····	101
旋转体侧面积·····	103
物理应用·····	103
第九章 实数空间 ·····	106
实数与极限·····	106
确界与区间套·····	108
紧性定理·····	110
完备性定理·····	111
连续函数的性质·····	112
压缩映象原理·····	113
上极限与下极限·····	115
第十章 广义积分 ·····	120
无穷积分的概念·····	120
无穷积分收敛性判别法·····	122
瑕积分的概念·····	123
瑕积分收敛性判别法·····	125
第十一章 数值级数 ·····	128
数值级数的基本概念与性质·····	128
正项级数·····	130
任意项级数·····	133
收敛级数的性质·····	138
第十二章 函数项级数 ·····	143
函数序列及函数级数的一致收敛性·····	143
一致收敛判别法·····	145
一致收敛的函数序列与函数级数的性质·····	148

第十三章 幂级数	154
幂级数的收敛半径与收敛区间.....	154
幂级数的性质.....	156
初等函数的泰勒级数展开.....	157
斯脱林公式.....	161
第十四章 富里埃级数	163
基本三角函数系.....	163
周期函数的富里埃级数.....	164
富里埃级数的收敛性.....	166
任意区间上的富里埃级数.....	169
富里埃级数的平均收敛性.....	171
第十五章 欧氏空间与多元函数	174
m 维欧氏空间.....	174
欧氏空间中的点集.....	175
m 维欧氏空间的性质.....	177
多元向量函数.....	178
多元函数的极限.....	180
多元函数的连续性.....	182
第十六章 多元数值函数微分学	187
偏导数.....	187
全微分与可微性.....	189
复合函数的偏导数与可微性.....	193
方向导数.....	196
高阶偏导数和高阶全微分.....	199
泰勒公式.....	203
由一个方程式确定的隐函数及其微分法.....	205
第十七章 多元向量函数微分学	209
线性变换.....	209
向量函数的可微性与导数.....	210
反函数及其微分法.....	213
由方程组确定的隐函数及其微分法.....	216

函数相关性·····	219
第十八章 多元函数微分学的应用——几何应用与极值问题 ·····	222
曲线的表示法和它的切线·····	222
空间曲面的表示法和它的切平面·····	224
简单极值问题·····	225
条件极值问题·····	228
最小二乘法·····	232
第十九章 含参变量的积分 ·····	235
含参变量的定积分·····	235
含参变量的广义积分·····	237
计算含参变量积分的几个例子·····	240
欧拉积分—— B 函数与 Γ 函数·····	242
第二十章 重积分 ·····	246
R^n 空间图形的若当测度·····	246
在 R^n 上的黎曼积分·····	247
化重积分为累次积分·····	248
重积分的变量替换·····	254
重积分的变量替换(续)·····	258
重积分在力学上的应用·····	262
第二十一章 曲线积分 ·····	270
与曲线有关的一些概念·····	270
第一型曲线积分·····	272
第二型曲线积分·····	273
平面上的第二型曲线积分与格林公式·····	275
第二十二章 曲面积分 ·····	282
曲面概念与曲面面积·····	282
第一型曲面积分·····	283
曲面的侧·····	284
第二型曲面积分·····	285
第二十三章 场论 ·····	286
向量场的通量、散度和高斯公式·····	286

向量场的环量和旋度·····	290
保守场与势函数·····	292
第二十四章 微分形式与斯托克斯公式 ·····	296
微分形式的定义·····	296
外微分·····	296
微分形式的变量替换·····	297

第〇章 预备知识

归 纳 法

0.1 用数学归纳法证明下列各题:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$(2) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$(3) |\sin nx| \leq n |\sin x|;$$

$$(4) \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha} (\alpha \neq k\pi, k \text{ 为整数}).$$

0.2 求证: 如果论断

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$$

对 $n=k$ 是成立的, 则这个论断对 $n=k+1$ 也是成立的. 解释这个论断不是对任意 n 成立.

0.3 $\forall x > -1, x \neq 0, n \geq 2$, 求证:

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

0.4 求证:

$$(1) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n=2, 3, \cdots);$$

$$(2) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n=2, 3, \cdots);$$

$$(3) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 4 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

0.5 $\forall n \geq 1$, 求证:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

绝对值与不等式

0.6 求证 $|a-b| \leq |a| + |b|$. 问下面证法是否正确?

$$|a-b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|.$$

0.7 求证: $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \geq |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k|.$

0.8 解下列不等式:

$$(1) |x-1| < 3; \quad (2) |3-2x| < 1;$$

$$(3) |1+2x| \leq 1; \quad (4) \left| 5 - \frac{1}{x} \right| < 1;$$

$$(5) |x-1| > 2; \quad (6) |x+2| > 5;$$

$$(7) |x^2-2| \leq 1; \quad (8) |x-5| < |x+1|.$$

0.9 设 $a < c < b$, 求证:

$$|c| \leq \max(|a|, |b|).$$

0.10 求证:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

0.11 求证:

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2},$$

$$\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

并解释其几何意义.

0.12 求证:

$$|a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \quad (p > 0).$$

0.13 设 $a, b > 0$. 求证:

(1) $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ ($p > 1$);

(2) $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ ($0 < p < 1$).

0.14 求证: 对任意实数 a, b , 有

$$\max(|a+b|, |a-b|, |1-b|) \geq \frac{1}{2}.$$

0.15 求证:

$$\frac{1}{4n} < \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^2 < \frac{1}{2n}.$$

0.16 令 $A_n = \prod_{k=1}^n (1+a_k)$, $B_n = \prod_{k=1}^n (1+|a_k|)$, 求证:

$$|A_n - 1| \leq B_n - 1.$$

第一章 函 数

函数概念

1.1.1 下列函数是否相等? 为什么?

(1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x) = \log_a x^2$, $g(x) = 2 \log_a x$;

(4) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

1.1.2 设

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ x^2 & x > 1. \end{cases}$$

求 $f(1)$, $f(f(1))$.

1.1.3 设 $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$. 求 $f(1)$, $f(f(1))$, $f(x^2)$, $[f(x)]^2$, $f(-x^2)$, $f(a+b)$, $f(a)+f(b)$.

1.1.4 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

(1) 求 $f(1), f(f(1)), f(f(f(1)))$;

(2) 求 $f(\sqrt{2})$;

(3) 求证 $|f^2(x)-2| < |x^2-2|, \forall x > 0 (x \neq \sqrt{2})$.

1.1.5 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\log \frac{5x-x^2}{4}}$; (2) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{2x^2+5x+3}$;

(3) $y = \sqrt{\cos x^2}$; (4) $y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

1.1.6 求函数 $y = \sqrt{x-x^2}$ 的定义域和值域.

1.1.7 作下列函数图形:

(1) $y = |x-1|$; (2) $y = x - [x]$;

(3) $y = \ln(1+x)$; (4) $y = \ln ax (a=2, -2)$;

(5) $y = 3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$; (6) $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

1.1.8 作函数 $y = |x-a| + \frac{1}{2}|x-b| (a < b)$ 的图形.

1.1.9 设 $f(x)$ 如图 1 所示, 试写出其表达式, 并作下列函数的图形:

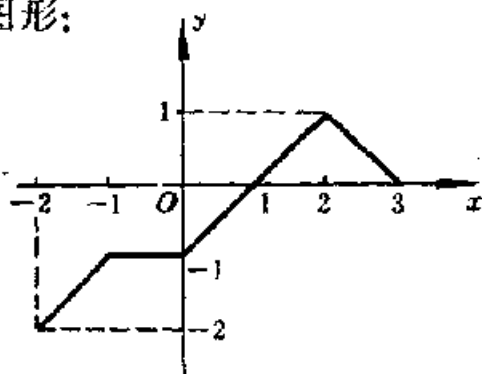


图 1

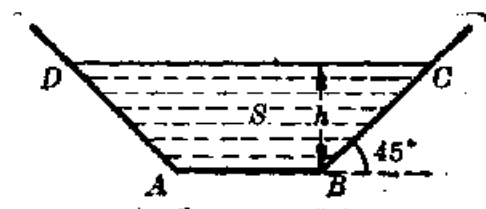


图 2

(1) $y = f(-x)$; (2) $y = -f(x)$;

(3) $y = |f(x)|$; (4) $y = f(|x|)$;

$$(5) y = f\left(\frac{1}{2}x\right); \quad (6) y = f(2x).$$

1.1.10 某水渠的横断面是一等腰梯形(见图2),底宽2米,坡度为1:1(即倾角为 45°), $ABCD$ 叫过水断面,求过水断面的面积 S 与水深 h 的函数关系.

1.1.11 一窗户下面为矩形,上面为半圆形,周长为 l ,试将窗户的面积表示成底边 x 的函数(见图3).

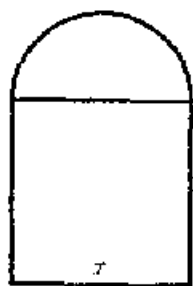


图3

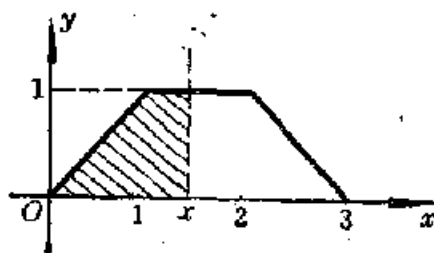


图4

1.1.12 梯形如图4所示,当一垂直于 x 轴的直线扫过该梯形时,若直线的垂足为 x ($-\infty < x < +\infty$),试将扫过面积表为 x 的函数.

函数的几种特性

1.2.1 对下列函数

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| (1) $y = \sin x ;$ | (2) $y = x - [x];$ |
| (3) $y = \lg x ;$ | (4) $y = \sec 2x;$ |
| (5) $y = \cos x + \sin x;$ | (6) $y = \sqrt{x(2-x)}$ |

分别讨论

- (1) 函数的定义域和值域;
- (2) 哪些函数为偶函数或奇函数;
- (3) 哪些函数为周期函数;
- (4) 作函数的图形.

1.2.2 求证 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数,

且严格单调上升.

1.2.3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数, 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调上升, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调上升.

1.2.4 设 $f(x) = \sqrt{x} (0 \leq x < 1)$.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-1, 1)$ 使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 使其成为周期为 1 的周期函数.

1.2.5 设 $f(x)$ 在 $[0, a)$ ($a > 0$) 上定义.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-a, a)$, 使其成为偶函数;

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$, 使其成为周期为 a 的周期函数.

1.2.6 求证两个奇函数之积为偶函数, 奇函数与偶函数之积为奇函数.

1.2.7 任一在实轴上定义的函数可分解成奇函数与偶函数之和.

1.2.8 设 $f(x)$ 是周期为 T ($T > 0$) 的周期函数, 求证 $f(-x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

1.2.9 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 为实轴上单调函数. 求证: $f[g(x)]$ 也是实轴上的单调函数.

1.2.10 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

1.2.11 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 当 $0 < p \leq 1$ 时, $(x_1 + x_2)^p \leq x_1^p + x_2^p$;

(2) 当 $p > 1$ 时, $(x_1 + x_2)^p \geq x_1^p + x_2^p$.

提示: 参看 0.13 题.

1.2.12 设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 上单调上升. 求证:

(1) $\max(f(x), g(x))$, (2) $\min(f(x), g(x))$

也在 (a, b) 上单调上升.

1.2.13 用肯定语气叙述: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上,

(1) $f(x)$ 不是奇函数;

(2) $f(x)$ 不是周期函数;

(3) $f(x)$ 不是单调上升函数;

(4) $f(x)$ 不是单调函数.

1.2.14 用肯定语气叙述:

(1) $f(x)$ 在 (a, b) 上无上界;

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 上没有零点;

(3) $f(x)$ 在 (a, b) 上没有比中点函数值大的点;

(4) $f(x)$ 在 (a, b) 上没有左边函数值比右边函数值都小的点.

复合函数与反函数

1.3.1 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. 求证 $f(f(x)) = x$.

1.3.2 设 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. 求使得 $f(f(x)) = x$ 的条件.

1.3.3 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ ($0 < x < +\infty$);

(2) $y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ ($-\infty < x < +\infty$).

1.3.4 在下列指定定义域上求函数 $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$ 的反函

数:

(1) $0 < |x| < 1$; (2) $|x| > 1$.

1.3.5 若 $f(x)$ 是一一对应的奇函数, 试证: 其反函数也是奇函数.

1.3.6 函数 $y = x - e \sin x$ ($0 < e < 1$) 是否有反函数?

1.3.7 设 $f(x) = \arccos x$, $g(x) = \sin x$, 试求复合函数 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ 的定义域和值域, 并作图.

1.3.8 设

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leq 0, \\ x, & x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$$

求复合函数 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

1.3.9 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ 次}}(x)$.

1.3.10 设 $f(x) = |1+x| - |1-x|$, 试求 $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ 次}}(x)$.

提示: 变成分段定义的函数.

1.3.11 若 $f(x)$ 在实轴上定义, 且 $f[f(x)] \equiv x$.

(1) 这种函数 $f(x)$ 有几个? 提示: 考虑 $f(x) = ax + b$ 的形式.

(2) 若 $f(x)$ 在实轴上严格上升, 这种函数有几个?

1.3.12 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 可以按两种顺序复合, 且 $f \circ g = g \circ f$, f 与 g 是否互为反函数?

1.3.13 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X , 值域为 Y , 函数 $z = g(y)$ 的定义域为 Y , 值域为 Z . 证明: 函数 $z = g[f(x)]$ 有反函数存在的充要条件为 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都有反函数存在, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

*

*

*

1.1 (1) 有一个身长为 a 的人, 在离路灯杆 b 处沿一直线以

等速 c 在路灯下行走, 设路灯高为 $h(>a)$, 他的头影沿怎样的曲线移动?

(2) 如果这人沿曲线 $y=f(x)$ 行进, 头影所描画的曲线方程为何?

1.2 (1) 在同一坐标系里画出 $y_1=\sin x$ 和 $y_2=\frac{2}{\pi}x\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 的图形;

(2) y_1, y_2 的图形有何联系?

(3) 求证: 在非钝角 $\triangle ABC$ 中, 有 $\sin A + \sin B + \sin C > 2$.

1.3 求证: $f(x) = \sin x + \cos \sqrt{2}x$ 为非周期函数.

提示: 利用 1.2.8 题.

1.4 设 $R(x)$ 为一有理函数, 求证:

(1) 若 $R(-x) = R(x)$, 则 $R(x) = R_1(x^2)$, R_1 为某一有理函数;

(2) 若 $R(-x) = -R(x)$, 则 $R(x) = xR_2(x^2)$, R_2 为某一有理函数.

提示: 变为多项式来讨论.

1.5 设 $f(x)$ 在实轴上定义, 若 $f[f(x)]$ 存在唯一的不动点, 求证: $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

注: 若 $\exists x^*$, 使 $f(x^*) = x^*$, 则称 x^* 为 f 的不动点.

1.6 设 $f(x)$ 在实轴上定义, 若 $f[f(x)]$ 有且仅有两个不动点 $a, b (a \neq b)$, 那么只存在两种情况:

(1) a 和 b 都是 f 的不动点;

(2) $f(a) = b, f(b) = a$.

第二章 极 限

序列极限定义

2.1.1 用 ε - N 方法验证

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0,$$

并对 $\varepsilon = 0.1, 0.01$ 求出相应的 N .

2.1.2 用 ε - N 方法验证下列极限为零.

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + n};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4 - n};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3}}{n-3};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n}{n!};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} \quad (a > 1);$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(n+1) - \ln n].$$

提示: 利用 0.4 题.

2.1.3 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |a|$.

2.1.4 设 $x_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

2.1.5 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$.

2.1.6 设 $x_n \leq a \leq y_n (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$. 求

证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a.$$

2.1.7 设 n, p 为正整数, 求证:

$$(1) \quad n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^p}{p+1} < (n+1)^p;$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^n k^p;$$

$$(3) \quad \text{求极限 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

2.1.8 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, l 为确定的自然数, 求证

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+l} = a.$$

反之成立吗?

2.1.9 (1) 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 的充要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} = a.$$

(2) 已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$ 都存在, 是否能保证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在?

2.1.10 在序列极限定义中, 对于 N 请回答:

(1) N 是否唯一?

(2) N 是否是 ε 的函数?

(3) 前 N 项是否有 $|x_n - a| \geq \varepsilon$?

2.1.11 序列极限定义改成下面形式是否可以?

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| \leq \varepsilon$;

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < M\varepsilon$ (M 为常数).

2.1.12 $\forall N > 0, \exists \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 序列 $\{x_n\}$ 具有什么性质?

2.1.13 $\exists N > 0, \forall \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 序列

$\{x_n\}$ 具有什么性质?

2.1.14 下面 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 的证明是否正确?

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} \ln n < \ln(1 + \varepsilon)$, 只要

$$\frac{1}{n} < \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln n} \leq \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln 2},$$

取 $N = \left\lceil \frac{\ln 2}{\ln(1 + \varepsilon)} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

序列极限的性质与运算

2.2.1 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$. 下面证法是否正确?

$$\because 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - a,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a.$$

2.2.2 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{1 + a + \cdots + a^{n-1}} (a > 0);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n});$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} (0 < a < 1); \quad (6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} (a > 1, k > 0).$$

2.2.3 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$. 求证:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(x_n, y_n) = \max(a, b);$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \min(x_n, y_n) = \min(a, b).$

2.2.4 求证 $\{\cos n\}$ 极限不存在.

提示: 利用反证法.

2.2.5 求证 $\{\operatorname{tg} n\}$ 与 $\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} n}\right\}$ 极限不存在.

2.2.6 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{1+n^2}};$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \cdot \ln n};$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}};$

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)};$

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$

2.2.7 若 $|x_{n+1}| \leq k|x_n|$ ($0 < k < 1$) 对任意 n 成立. 求证

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

2.2.8 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}, x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2}.$

提示: 设法利用上题.

2.2.9 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$

提示: 先形式上对 x_n 取极限, 看出极限值.

2.2.10 设 $x_0 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$

2.2.11 (1) 设 $b > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. 求证: $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1, \exists N.$

当 $n > N$ 时, 有 $\log_b(1-\varepsilon) < x_n < \log_b(1+\varepsilon);$

(2) 设 $b > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{x_n} = 1$;

(3) 设 $0 < b < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{x_n} = 1$;

(4) 设 $b > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{x_n} = b^a$.

2.2.12 (1) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$, 求证: $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1, \exists N$, 当 $n > N$

时, 有 $e^{-\varepsilon} < y_n < e^{\varepsilon}$;

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln y_n = 0$;

(3) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b (> 0)$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln y_n = \ln b$;

(4) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b (> 0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n^{x_n} = b^a$.

2.2.13 (1) 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = q < 1$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$;

(2) 设 $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

2.2.14 设 $\{x_n\}$ 为无穷小.

(1) $\{x_n^n\}$ 是否为无穷小?

(2) $\{\sqrt[n]{x_n}\} (x_n > 0)$ 是否为无穷小?

确界与单调有界序列

2.3.1 求下列集合的上、下确界:

(1) $E = \left\{ [1 + (-1)^n] \frac{n+1}{n} \mid n \text{ 为正整数} \right\}$;

(2) $E = \left\{ \frac{m}{n} \mid 0 < m < n, m, n \text{ 为正整数} \right\}$;

(3) $E = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} \mid n \text{ 为正整数} \right\}$;

(4) $E = \{ \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}} \mid n \text{ 为正整数} \}$;

(5) $E = \{ x - [x] \mid x \text{ 为实数} \}$.

2.3.2 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 D 上定义, 且 $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$.

求证: (1) $\sup_{x \in D} f(x) \leq \sup_{x \in D} g(x)$;

(2) $\inf_{x \in D} f(x) \leq \inf_{x \in D} g(x)$.

2.3.3 设 $f(x)$ 在 D 上定义, 求证:

(1) $\sup_{x \in D} \{-f(x)\} = -\inf_{x \in D} f(x)$;

(2) $\inf_{x \in D} \{-f(x)\} = -\sup_{x \in D} f(x)$.

2.3.4 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界, 求证:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) &\leq \inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \\ &\leq \left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x) \\ \sup_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \end{array} \right\} \leq \\ &\leq \sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x). \end{aligned}$$

2.3.5 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界且大于 0, 求证:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in D} f(x) \cdot \inf_{x \in D} g(x) &\leq \inf_{x \in D} f(x) \cdot g(x) \leq \\ &\leq \left\{ \begin{array}{l} \inf_{x \in D} f(x) \cdot \sup_{x \in D} g(x) \\ \sup_{x \in D} f(x) \cdot \inf_{x \in D} g(x) \end{array} \right\} \leq \\ &\leq \sup_{x \in D} f(x) \cdot g(x) \leq \sup_{x \in D} f(x) \cdot \sup_{x \in D} g(x). \end{aligned}$$

2.3.6 求下列序列的极限:

(1) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$;

(2) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$.

2.3.7 利用单调有界有极限定理, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2.3.8 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

求证 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 极限存在且相等.

2.3.9 设 $0 < a_1 < b_1 < c_1$, 令

$$a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n \cdot b_n \cdot c_n},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

求证序列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 极限存在且相等.

2.3.10 求证: (1) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

(2) 序列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ 的极限存在;

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right) = \ln 2$.

提示: 参看 0.4 与 0.5 题.

2.3.11 设 $A > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$. 求证序列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

2.3.12 设 $A > 0$, $0 < x_1 < \frac{1}{A}$, $x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n)$. 求证序列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

2.3.13 序列 $\{q_n\}$ 满足下列条件:

$$0 < q_n < 1, \quad (1 - q_n)q_{n+1} > \frac{1}{4}.$$

证明: $\{q_n\}$ 单调上升, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \frac{1}{2}$.

2.3.14 设 $\{a_n\}$ 单调下降, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 令

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

求证: (1) $\{b_n\}$ 单调下降;

$$(2) \quad b_{2n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n);$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

函数极限

2.4.1 函数极限定义与下列形式是否等价:

$$(1) \quad \forall \frac{1}{2^n}, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x-a| < \delta \text{ 时, } |f(x)-A| < \frac{1}{2^n};$$

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \frac{1}{n} > 0, \text{ 当 } 0 < |x-a| < \frac{1}{n} \text{ 时, } |f(x)-A| < \varepsilon;$$

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x-a| < \delta \text{ 时, } |f(x)-A| < \varepsilon^2;$$

$$(4) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x-a| < \varepsilon \cdot \delta \text{ 时, } |f(x)-A| < \varepsilon;$$

$$(5) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x-a| < \delta \text{ 时, } |f(x)-A| < \varepsilon \cdot \delta.$$

2.4.2 用 ε - δ 方法验证下列各题:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2;$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a > 0); \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3;$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

2.4.3 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 用 ε - δ 方法证明下列各题:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = A^2;$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A} \quad (A > 0); \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{A};$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (A > 0).$$

2.4.4 求下列极限:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}; \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

函数极限概念的推广

2.5.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x} - x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

2.5.2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0+0} x \left[\frac{1}{x} \right]; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{[4x]}{1+x}.$$

2.5.3 讨论有理函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} \quad (a_0 \cdot b_0 \neq 0).$$

2.5.4 求下列曲线的渐近线:

$$(1) y = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x-1}; \quad (2) y = \sqrt{4x^2 + 2x + 3};$$

$$(3) y = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}.$$

2.5.5 设 $a > 1, k > 0$, 用极限不等式求证:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

2.5.6 用变量替换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x.$$

2.5.7 设 $f(x)$ 在集合 X 上定义, 则 $f(x)$ 在 X 上无界的充要

条件是: $\exists x_n \in X, n=1, 2, \dots$, 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$.

2.5.8 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调上升, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$, 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (A 可以为无穷).

2.5.9 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调上升, 若

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

2.5.10 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, $g(x)$ 单调, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = \infty$, 求证 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

2.5.11 叙述 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ 的定义, 并证明:

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty;$$

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A (> 0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty.$$

2.5.12 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 求证: $f(x) \equiv 0$.

2.5.13 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上满足函数方程: $f(2x) = f(x)$ ($x > 0$), 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 求证: $f(x) \equiv l$.

2.5.14 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 求证: $\forall \varepsilon > 0, \exists X$, 当 $x_1, x_2 > X$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

下面证法是否可以?

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \exists X_1$, 当 $x_1 > X_1$ 时, 有

$$|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\exists X_2$, 当 $x_2 > X_2$ 时, 有

$$|f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $X = \max(X_1, X_2)$, 则当 $x_1, x_2 > X$ 时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个重要极限

2.6.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \text{ 为整数});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{arccos} x)}{x} \quad (n \text{ 为奇数});$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow -\infty} [\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}];$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}).$$

2.6.2 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}.$$

2.6.3 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^3};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^{x^2} \quad (a \neq 0);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n;$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+\ln n}{n-\ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}}.$$

无穷小量的阶及无穷大量的阶的比较

2.7.1 求下列量的等价无穷小量($x \rightarrow 0$):

$$(1) \ln(1+x);$$

$$(2) e^x - 1;$$

$$(3) \sqrt[n]{1+x} - 1;$$

$$(4) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

2.7.2 求下列量的等价无穷大量:

$$(1) 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 \quad (x \rightarrow \infty);$$

$$(2) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad (x \rightarrow +\infty);$$

$$(3) \frac{x+1}{x^2+2x-3} \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(4) \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \quad (x \rightarrow 0).$$

2.7.3 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下面等式成立吗?

$$(1) o(x^2) = o(x);$$

$$(2) O(x^2) = o(x);$$

$$(3) x \cdot o(x^2) = o(x^3);$$

$$(4) \frac{o(x^2)}{x} = o(x);$$

$$(5) \frac{o(x^2)}{o(x)} = o(x);$$

$$(6) o(x) = O(x^2).$$

2.7.4 设 $x \rightarrow a$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为等价无穷小, $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为等价无穷大, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot g_2(x)$ 存在. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot g_2(x).$$

2.7.5 设 $x \rightarrow a$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为同阶无穷小, $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为等价无穷小, 且 $f_1(x) > 0, f_2(x) > 0$. 并设

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)^{q_2(x)} = A (A > 0)$$

求证:

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)^{g_1(x)} = A.$$

用肯定语气叙述极限不存在

2.8.1 用肯定语气叙述 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \neq +\infty$.

2.8.2 用肯定语气叙述 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 不存在.

2.8.3 证明下列极限不存在:

(1) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$;

(2) $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$;

(3) $x_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+n})$.

*

*

*

2.1 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 将序列 $\{x_n\}$ 的项进行重排后, 得到新的序

列 $\{x'_n\}$. 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = a$.

2.2 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

2.3 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ ($a_n > 0$). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a.$$

2.4 设 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

2.5 求证:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

2.6 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 而且 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x)$. 求证:

$$f(x) = o(x).$$

2.7 设 $f(x)$ 在 $x > a$ 上定义, 并且在每一有限区间 (a, b) 上有界. 求证: 如果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

2.8 (1) 设 $0 < a_1, a_2, \dots, a_n < 1$. 证明:

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) \geq 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n);$$

(2) 已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e;$$

(3) 证明:

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n};$$

(4) 证明:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n} \quad \left(\frac{n}{n+1} < \theta_n < 1\right).$$

2.9 证明 e 是无理数.

2.10 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi n! e) = 2\pi$.

第三章 连续

连续与间断

3.1.1 研究下列函数的连续性, 并指出间断点类型:

(1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

(2) $g(x) = x - [x]$;

$$(3) f[g(x)]; g[f(x)];$$

$$(4) h(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) / \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right).$$

3.1.2 指出下列函数的间断点, 并说明属于那一类型间断点:

$$(1) y = \frac{x}{(1+x)^2};$$

$$(2) y = \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(3) y = \operatorname{sgn}(\sin x);$$

$$(4) y = \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right]} \quad (0 < x \leq 1).$$

3.1.3 适当选取 a , 使函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

连续.

3.1.4 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, $g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续, 问 $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 是否一定不连续.

3.1.5 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续, 问 $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 是否一定不连续, 举出适当例子.

3.1.6 举出处处都不连续, 但取绝对值后却是处处连续的函数的例子.

3.1.7 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续, 且 $f(x_0) > 0$. 求证: $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0; \delta)$ 时, $f(x) > 0$.

下面证法是否正确?

$\forall \varepsilon > 0$, 无妨设 $0 < \varepsilon < f(x_0)$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon > 0, x \in U(x_0; \delta).$$

连续函数的运算

3.2.1 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 证明:

- (1) $|f(x)| \in C[a, b]$;
- (2) $\max(f(x), g(x)) \in C[a, b]$;
- (3) $\min(f(x), g(x)) \in C[a, b]$.

3.2.2 设 $f(x) \in C[a, b]$, 令

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > t \text{ 的 } x \in [a, b], \\ t, & f(x) \leq t \text{ 的 } x \in [a, b]. \end{cases}$$

求证: $f_t(x) \in C[a, b]$.

3.2.3 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且满足条件

$$f(x^2) = f(x) \quad (x > 0).$$

证明: $f(x)$ 为一常数.

3.2.4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = f(1) \cdot x$.

3.2.5 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上只有第一类间断点, 且对 $\forall x, y \in (a, b)$, 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

求证: $f(x)$ 在 (a, b) 上连续.

3.2.6 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq x (x \geq 0)$, 若 $a_1 \geq 0, a_{n+1} = f(a_n) (n=1, 2, \dots)$. 求证:

- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在;
- (2) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$, 则 $f(l) = l$;
- (3) 如果将条件改为 $0 \leq f(x) < x (x > 0)$, 则 $l = 0$.

中间值性质

3.3.1 证明方程 $x^3+px+q=0 (p>0)$ 有且只有一个实根.

3.3.2 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, 证明:
 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

3.3.3 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 若 $x_n, y_n \in (a, b) (n=1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$, 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = B (> A).$$

$\forall \eta$ 满足 $A < \eta < B$. 求证: $\exists z_n \in (a, b)$, 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = b$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = \eta.$$

3.3.4 设 $f(x) \in C[a, b]$, $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上单调. 求证: $f(x)$ 也在 $[a, b]$ 上单调.

3.3.5 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in [a, b])$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调上升或严格单调下降.

3.3.6 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (0 < k < 1).$$

求证: (1) 函数 $kx - f(x)$ 单调上升;

(2) $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(\xi) = \xi$.

初等函数的连续性

3.4.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} x)^{\cos \frac{1}{x}}.$$

3.4.2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

3.4.3 证明: 方程 $x^\alpha = \ln x$ ($\alpha < 0$) 在正实轴上有且仅有一根.

最大、最小值

3.5.1 设 $f(x) \in C[a, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 证明: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

3.5.2 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上取到它的最小值.

3.5.3 设 $f(x) \in C[a, b)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = B$.

(1) $\exists x_1 \in [a, b)$, 使 $f(x_1) > B$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上达到最大值;

(2) $\exists x_1 \in [a, b)$, 使 $f(x_1) = B$, $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上是否达到最大值?

3.5.4 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$. 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|.$$

3.5.5 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

3.5.6 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $f(x) > 0$. 令

$$M(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

求证: 函数 $Q(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{f(x)}{M(x)} \right\}^n$ 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是单调上升的.

3.5.7 设 $f(x) \in C[a, b]$, 记 $g(x) = \max_{a \leq t \leq x} f(t) \quad (a \leq x \leq b)$, 求证: $g(x) \in C[a, b]$.

3.5.8 设 $f(x) \in C[a, b]$, 并且 $\forall x \in [a, b], \exists y \in [a, b]$, 使 $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. 求证: $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = 0$.

3.5.9 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a) < a$, 证明: $f(f(x))$ 至少在两点取到最小值.

3.5.10 设 $f(x) \in C[-1, 1]$, $f(0) > 0$, $f(\pm 1) = 0$. 求证: 存在常数 $a > 0, b$, 使得 $g(x) = -a|x| + b \geq f(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$, 且存在 $c (-1 < c < 1)$ 使得 $g(c) = -a|c| + b = f(c)$.

一致连续性

3.5.11 求证: $y = x$ 和 $y = \sin x$ 在实轴上一致连续.

3.5.12 求证: $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

3.5.13 证明下列函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续:

(1) $y = x^3$; (2) $y = x \cdot \sin x$.

3.5.14 求证: $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上一致连续,

但是 $0 < |x| < 1$ 上并非一致连续.

3.5.15 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 证明:

- (1) $f(x)$ 在 (a, b) 上有界;
(2) $y = \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续.

3.5.16 设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 证明: $f(x) +$

$g(x), f(x) \cdot g(x)$ 也在 (a, b) 上一致连续.

3.5.17 若周期函数 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续;

(2) $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ 不是周期函数.

3.5.18 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足李普希兹条件

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (k \text{ 为常数}),$$

$\forall x, y \in [a, b]$. 证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

3.5.19 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上满足李普希兹条件,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, +\infty).$$

证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

3.5.20 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

下面证明是否正确?

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\exists X_1 > 0$, 当 $x > X_1$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以当 $x_1, x_2 > X_1$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon.$$

即知 $f(x)$ 在 $[X_1, +\infty)$ 上一致连续;

同理, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$, $\exists X_2 < 0$, 当 $x_1, x_2 < X_2$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

即知 $f(x)$ 在 $(-\infty, X_2]$ 上一致连续;

又因 $f(x)$ 在闭区间 $[X_2, X_1]$ 上连续, 故在闭区间 $[X_2, X_1]$ 上一致连续;

合起来得 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

3.5.21 证明: $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续必一致连续. 下面

证明是否正确?

用反证法. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一致连续, $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta_1 > 0, \exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta_1$, 而

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0. \quad (1)$$

由 $f(x)$ 在 $x = x_2$ 点连续, 对上面 $\varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon_0. \quad (2)$$

由于(1)中对任意 $\delta_1 > 0$ 成立, 取 $\delta_1 = \delta$, 则 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0. \quad (3)$$

又(2)中对任意满足 $|x - x_2| < \delta$ 的 x 成立, 取 $x = x_1$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0. \quad (4)$$

(3)与(4)矛盾, 这说明反证法假设不成立, 即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

* * *

3.1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调, 且满足函数方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in (-\infty, +\infty).$$

说明: (1) $f(nx) = nf(x)$ (n 为整数);

$$(2) \quad f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x) \quad (n \text{ 为整数});$$

$$(3) \quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \text{ 为有理数});$$

$$(4) \quad f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续};$$

$$(5) \quad f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上连续};$$

$$(6) \quad f(x) = f(1) \cdot x.$$

3.2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调, 且满足方程:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in (-\infty, +\infty).$$

求证: $f(x) = f(0) + f(1) \cdot x$.

3.3 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, $\forall x, y \in (a, b)$ 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

求证: (1) $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)];$$

(2) $\forall t, 0 < t < 1, \forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 有

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

3.4 求证黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 与 } n \text{ 互素;} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在任一有理点间断, 在任一无理点连续.

3.5 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 有正的最大值.

求证: 存在二次多项式 $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$), 使

$$Q(x) \geq f(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ 且 } Q(\alpha) = f(\alpha) \quad (0 < \alpha < 1).$$

3.6 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

提示: 由 3.5.5 题, 先说明 $f(x)$ 趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 再说明 $f(x)$ 不趋于 $-\infty$.

3.7 证明: 方程 $x^2 + 3x^3 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7 = 0$ 有且仅有一个正实根.

提示: 提出一个公因子.

3.8 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$. 求证:

(1) 若 $f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| > \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$, 则 $f(x_0) > g(x_0)$;

(2) 若 $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| > \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$, 则 $f(x)$ 与 $f(x) - g(x)$ 在

$|f(x)|$ 达到最大值的点处有相同的符号.

3.9 设在 $[-1, 1]$ 上, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ ($n=1, 2, \dots$). 求证:

(1) $|T_n(x)|$ 在 $n+1$ 个点 $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ ($k=0, 1, \dots, n$) 上达到最大值;

(2) 任一首项系数为 1 的 n 次多项式 $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, 必有

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

提示: $T_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次多项式, 然后利用上题.

3.10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, 对 $[a, b]$ 上任一闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l , 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解. 证明: $f(x) \in C[a, b]$.

3.11 证明: 在 $x \geq 0$ 上有非零连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(2^2 x) = f(2x) + f(x).$$

提示: 限于基本初等函数类中考虑.

第四章 导数与微分

导数概念

4.1.1 用定义求 $f'(0)$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4.1.2 用定义求 $f'(0)$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4.1.3 设

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性、可导性:

(1) $D(x)$; (2) $x \cdot D(x)$; (3) $x^2 \cdot D(x)$.

4.1.4 设 $f(x) \in C(a, b)$, 在 $x_0 \in (a, b)$ 处可导, 证明: 函数

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

在 x_0 处补充定义后为连续函数, 即 $g(x) \in C(a, b)$.

4.1.5 设 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明: $f'(0) = 0$.

4.1.6 设 $f'(x_0)$ 存在, 证明对称导数也存在, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

4.1.7 设 $f(0) = 0$, $f'(0)$ 存在, 令

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right),$$

试求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

4.1.8 求下列序列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n}{n^2} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right).$$

4.1.9 设 $P(x)$ 是最高次项系数为 1 的多项式, M 是它的最大实根, 求证: $P'(M) \geq 0$.

4.1.10 设 $f(x)$ 是奇函数, 已知 $f'(x_0) = 3$, 求 $f'(-x_0)$.

导数的几何意义与极值

4.2.1 给定抛物线 $y = x^2 - x + 3$, 求过 $(2, 5)$ 点的切线与法线方程.

4.2.2 求过点 $(-1, 1)$ 的曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的切线.

4.2.3 求抛物线 $y = x^2$ 在点 $A(x_0, x_0^2)$ 的切线与法线. 证明这切线在 x 轴上的截距为 $\frac{x_0}{2}$, 利用这个性质把切线与法线准确地画出来.

4.2.4 给定曲线 $y = x^2 + 5x + 4$.

(1) 确定 b , 使直线 $y = 3x + b$ 为曲线的切线;

(2) 确定 m , 使直线 $y = mx$ 为曲线的切线.

4.2.5 设有曲线 $y = x^3$ 和直线 $y = px - q$, 其中 $p > 0$, p, q 为实数.

(1) p 给定后, 试确定 q , 使 $y = px - q$ 是 $y = x^3$ 的切线;

(2) 利用图形求出方程 $x^3 - px + q = 0$ ($p > 0$) 有三个不同实根的条件.

4.2.6 求出方程 $\frac{1}{x^2} + px + q = 0$ ($p > 0$) 有三个不同实根的条件.

4.2.7 (1) 确定 m , 使 $y = mx$ 为曲线 $y = \ln x$ 的切线;

(2) 利用图形求出方程 $\ln x - mx = 0$ 有两个实根的条件.

4.2.8 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则两个极大点之间必有一极小点; 反之, 两个极小点之间必有一极大点.

4.2.9 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且只有一个极值点, 求证: 如果是极大点必是最大点, 如果是极小点必是最小点.

导数的四则运算

4.3.1 求下列函数的导数:

$$(1) y = 3x + 5\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}; \quad (2) y = \frac{2 - \sqrt{x} + 3x - 5x^2}{x^2};$$

$$(3) y = \frac{1+x^2}{1-x^2}; \quad (4) y = \frac{1}{1+x+x^2};$$

$$(5) y = (1-x)(2-x)(3-x); \quad (6) y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2};$$

$$(7) y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}; \quad (8) y = \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}};$$

$$(9) y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}; \quad (10) y = \frac{2-x}{(1-x)(1+x^2)};$$

$$(11) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}; \quad (12) y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0).$$

4.3.2 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^2 \cdot \sin x; \quad (2) y = x^3 \ln x - \frac{1}{n} x^n;$$

$$(3) y = \cos x \cdot \ln x; \quad (4) y = x \cdot \sin x \cdot \ln x;$$

$$(5) y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x; \quad (6) y = \frac{\sin x}{x};$$

$$(7) y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}; \quad (8) y = \operatorname{ctg} x;$$

$$(9) y = \sec x; \quad (10) y = \csc x;$$

$$(11) y = \sin 2x; \quad (12) y = \frac{\cos x}{x^4} \ln \frac{1}{x}.$$

4.3.3 确定常数 a, b , 使函数

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x>1 \\ x^2, & x\leq 1, \end{cases}$$

有连续的导数.

4.3.4 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right] \quad (p \text{ 有理数}).$$

4.3.5 利用等比级数的求和公式, 求下列级数的和:

$$(1) S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1};$$

$$(2) S_n = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}.$$

4.3.6 求证:

$$(1) C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1};$$

$$(2) C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}.$$

4.3.7 设 $f(x)$ 是有理函数, 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$.

4.3.8 在周长一定的等腰三角形中, 腰与底成何比例时, 使其绕底边旋转所得的旋转体体积最大.

4.3.9 求点 $(0, h)$ ($h > 0$) 到曲线 $y = x^2$ 的最短距离.

4.3.10 作一无盖的圆柱形茶缸, 若体积 V 一定, 底半径 R 与高 H 成何比例时, 侧面积最小(即用料最省).

4.3.11 有半径为 a 的半球形杯子, 杯内放一长为 l ($> 2a$) 的均匀细棒(见图 5). 求棒的平衡位置(即求棒的重心 A 的高度的最小值).

$$4.3.12 \text{ 设 } f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(1) 当 n 为偶数时, 求证 $f(x)$ 在实轴上有正的最小值;

(2) 当 n 为奇数时, $f(x)$ 有且仅有一个实根.

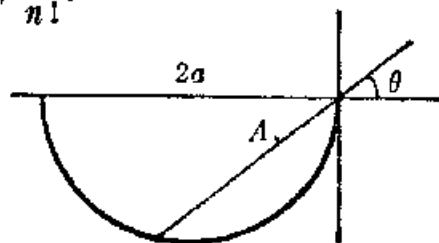


图 5

复合函数求导

4.4.1 求下列函数的导数:

$$(1) y = (x^3 - 4)^3; \quad (2) y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(3) y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad (4) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$$

$$(5) y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}; \quad (6) y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}};$$

$$(7) y = \ln(\ln x); \quad (8) y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|;$$

$$(9) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}); \quad (10) y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$(11) y = \ln^3 x^2; \quad (12) y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}};$$

$$(13) y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}; \quad (14) y = \cos^3 x - \cos 3x;$$

$$(15) y = \sin^n x \cdot \cos nx; \quad (16) y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x;$$

$$(17) y = \cos(\cos \sqrt{x}); \quad (18) y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

4.4.2 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{k=1}^n k \sin kx; \quad (2) \sum_{k=1}^n k \cos kx.$$

4.4.3 在 $x=0$ 点附近 $f'(x)$ 存在.

(1) 由 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 求证: $|f'(0)| \leq 1$;

(2) 设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 已知 $|f(x)| \leq |\sin x|$, 求证:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

4.4.4 确定常数,使下列函数处处可导:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为常数})$$

$$(2) \quad g(x) = \begin{cases} x+c, & x \geq 0, \\ \ln(1+x), & x < 0. \end{cases} \quad (c \text{ 为常数})$$

(3) 求 $f'(0)$ 与求 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 是否是一回事?

4.4.5 讨论下列函数的可导性,在可导点处求其导数.

$$(1) \quad y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)|;$$

$$(2) \quad y = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2, & |x| \leq 1, \\ |x| - 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

4.4.6 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导. 求证:

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f'(x)$ 为偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 为周期函数,则 $f'(x)$ 也是周期函数.

4.4.7 设在 $x=1$ 处, $\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d}{dx}f^2(x)$. 求证:

$$f'(1) = 0 \quad \text{或} \quad f(1) = 1.$$

4.4.8 在距海岸 5 公里处有一灯塔,它的灯每分钟转动一周,试求光束与岸边成 60° 角时,光束沿岸边滑动的速度(公里/分).

4.4.9 设一质点 P 在 y 轴上作等速运动, A 为 x 轴上定点,试证 AP 的角速度与 $(AP)^2$ 成反比.

4.4.10 给定可导函数 $f(x) > 0$, 证明调制函数

$$y = f(x) \sin ax \quad (a > 0)$$

永远夹在两条振幅曲线 $y = \pm f(x)$ 之间,并与之相切.

4.4.11 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的内接矩形中面积最大的矩形.

4.4.12 把一圆形铁片剪下中心角为 α 的一扇形,并将其围成一圆锥.

(1) 试将这圆锥的容积 V 表成 α 的函数;

(2) 求 $\alpha=?$ 时,容积 V 最大.

4.4.13 设 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ ($a>0$).

(1) 求 y' ;

(2) 证明:曲线的切线被坐标轴所截长度为一常数.

4.4.14 设 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a>0$).

(1) 求 y' ;

(2) 已知曲线有渐近线,试求出渐近线方程;

(3) 求出与渐近线平行的切线.

提示:求渐近线斜率即求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$.

4.4.15 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限中的切线,使它被坐标轴所截的线段最短.

4.4.16 确定 λ ,使曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $xy = \lambda$ 相切,并求出切线方程.

4.4.17 用对数微分法求下列函数的导数:

(1) $y = x^x$ ($x>0$);

(2) $y = x^{\lg x}$ ($x>0$);

(3) $y = x^{\ln x}$ ($x>0$);

(4) $y = e^{\sqrt{x}}$ ($x>0$);

(5) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($x \neq 0$);

(6) $y = a^{\sin x}$ ($a>0$);

(7) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x>0$);

(8) $y = x^{x^x}$ ($x>0$).

反函数与参数表示的函数求导

4.5.1 求下列函数的导数:

(1) $y = e^{\sqrt{x}}$ ($x>0$);

(2) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ($x \neq 0$);

$$(3) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad (4) y = \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(5) y = \arcsin \frac{1}{x}; \quad (6) y = \arccos(\sin x);$$

$$(7) y = e^{ax}(\cos bx + \sin bx);$$

$$(8) y = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$$

$$(9) y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2};$$

$$(10) y = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad (a > b > 0);$$

$$(11) y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x);$$

$$(12) y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a, b > 0);$$

$$(13) y = x^{aa} + a^{xa} + a^{ax}; \quad (14) y = e^{-x^2}(x^2 - 2x + 2);$$

$$(15) y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right); \quad (16) y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$$

$$(17) y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0);$$

$$(18) y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| \quad (a > 0);$$

$$(19) y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$$

$$(20) y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - 1}.$$

4.5.2 求曲线 $y = e^{-x}$ 的切线, 使它与两个正半轴所围的三角形面积最大.

4.5.3 墙上有一幅画高 a 尺, 底边距观察者眼睛高 b 尺, 当观察者离墙多远时, 观察画的视角最大.

4.5.4 当 $a > 0$, $b > 0$ 时, 求下列方程有两个不同正实根的

条件

$$(1) e^{bx} = ax^2; \quad (2) e^{bx^2} = ax^2.$$

提示: 也可取对数做.

4.5.5 求证: 极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - b}{x - a} = A$ 的充要条件为:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^b}{x - a} = e^b A.$$

4.5.6 设 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.

(1) 求 $y'(x)$;

(2) 证明曲线的切线被坐标轴所截长度为一常数.

4.5.7 曳物线

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), y = a \sin t \quad (a > 0, \quad 0 < t < \pi).$$

(1) 求 $y'(x)$;

(2) 证明: 切线上自切点至 x 轴交点的切线段为一定长.

4.5.8 证明: 圆 $r = 2a \sin \theta$ ($a > 0$) 的向径与切线间的夹角等于向径的极角.

4.5.9 证明: 心脏线 $r = a(1 - \cos \theta)$ ($a > 0$) 的向径与切线间的夹角等于向径极角的一半.

4.5.10 证明: 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 的向径与切线间的夹角等于两倍向径的极角加 $\frac{\pi}{2}$.

微 分

4.6.1 用一阶微分不变性求微分:

$$(1) y = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|; \quad (2) y = \operatorname{arctg} e^x;$$

$$(3) y = x^{ax} \quad (a > 0); \quad (4) y = e^{\sin x^2}.$$

4.6.2 设 u, v 是 x 的可微函数, 求 dy :

(1) $y = \arctg \frac{u}{v}$;

(2) $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$;

(3) $y = \ln \sin(u+v)$;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

4.6.3 填空:

(1) $2e^{\sin^2 x} \sin x \cos x dx = d(\quad)$;

(2) $\frac{1}{a^2 + x^2} dx = d(\quad)$;

(3) $\frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x} dx = d(\quad)$;

(4) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\quad)$;

(5) $2xe^{x^2} \cos e^{x^2} dx = d(\quad)$;

(6) $\frac{e^x}{1+e^x} dx = d(\quad)$;

(7) $\frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = d(\quad)$.

4.6.4 为使计算球体积的相对误差准确到 1%, 度量半径 R 时所允许的相对误差应如何?

4.6.5 求下列近似值:

(1) $\sqrt{120}$;

(2) $\sqrt[4]{80}$;

(3) $\sin 29^\circ$;

(4) $\arctg 1.05$.

4.6.6 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导, α_n, β_n 为趋于零的正数序列, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 - \beta_n)}{\alpha_n + \beta_n} = f'(x_0).$$

高阶导数与高阶微分

4.7.1 设 $f''(1)=0, f'(1)=1$. 求证: 在 $x=1$ 点

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d^2}{dx^2}f^2(x).$$

4.7.2 设 $y_1 = \arcsin x, y_2 = \arccos x$. 求证 y_1, y_2 都满足方程:

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

4.7.3 设 $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$. 求证:

$$(1+x^2)y'' + xy' = m^2y.$$

4.7.4 求证: 切比雪夫多项式 $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ 满足方程

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

4.7.5 求下列隐函数的二阶导数 y'' :

(1) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} \quad (a>0);$

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a>0).$

4.7.6 求下列参数式的二阶导数 $y''(x)$:

(1) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \quad (a>0);$

(2) $x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), y = a \sin t \quad (a>0).$

4.7.7 设 $y=y(x)$ 存在反函数, 且满足方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0.$$

证明: 反函数 $x=x(y)$ 满足 $\frac{d^2 x}{dy^2} = 1$, 并由此求出一个 $y=y(x)$.

4.7.8 求下列函数的高阶导数 $y^{(n)}$:

(1) $y = \frac{1}{1-x^2};$

(2) $y = \frac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}};$

$$(3) \quad y = \frac{x^n}{1-x};$$

$$(4) \quad y = \sin^2 x;$$

$$(5) \quad y = \sin^3 x;$$

$$(6) \quad y = e^x \sin x;$$

$$(7) \quad y = \frac{x^n}{x^2-1};$$

$$(8) \quad y = e^x (\sin x + \cos x).$$

4.7.9 求证:

$$(1) \quad \text{若 } y = x^{n-1} \ln x, \text{ 则 } y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x};$$

$$(2) \quad \text{若 } y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ 则 } y^{(n)} = (-1)^n \frac{n! c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}} (bc-ad).$$

4.7.10 用数学归纳法求证: 若 $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$, 则

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

4.7.11 设 $y = \arctg x$. 求证:

$$(1) \quad y^{(n)} = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}, \text{ 其中 } P_{n-1}(x) \text{ 为 } n-1 \text{ 次多项式};$$

$$(2) \quad P_{n-1}(x) \text{ 的最高次项是 } (-1)^{n-1} n! x^{n-1}.$$

4.7.12 给定函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\ln|x|), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(n 为自然数). 求证: $f(x)$ 在 $x=0$ 点有直到 $n-1$ 阶的导数, 而无 n 阶导数.

4.7.13 设 $y = (\arcsin x)^2$.

$$(1) \quad \text{证明: } (1-x^2)y'' - xy' = 2,$$

$$(2) \quad \text{证明: } (1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0 \\ (n \geq 1);$$

$$(3) \quad \text{证明: } y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0);$$

$$(4) \quad \text{求 } y^{(n)}(0).$$

4.7.14 设 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$.

(1) 证明: $(1-x^2)y' - xy = 1=0$;

(2) 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0$
 $(n \geq 1)$;

(3) 求 $y^{(n)}(0)$.

4.7.15 求证勒襄德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2-1)^n]^{(n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

满足方程:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

提示: 令 $u = (x^2-1)^n$.

4.7.16 求证: 切比雪夫-拉盖尔多项式

$$y = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

满足方程

$$xy'' - (x-1)y' + ny = 0.$$

4.7.17 求证: 切比雪夫-厄尔米特多项式

$$y = (-1)^n \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

满足方程

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

*

*

*

4.1 设 $y = \frac{x^n}{(x+1)^2(x+2)^2}$. 求 $y^{(n)}$.

4.2 设 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(1) 求证: $y^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式;

(2) 求证: $P_{n+1} = (1+x^2)P'_n - (2n+1)xP_n$;

(3) 求证: $P'_n = -n^2 P_{n-1}$.

4.3 设 $y = e^{\sqrt{x}}$, 求证:

(1) $4xy'' + 2y' - y = 0$;

(2) $4xy^{(n+1)} + (4n-2)y^{(n)} - y^{(n-1)} = 0$;

(3) $y = \frac{d^n}{dx^n} \left[(4x)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} y \right]$.

4.4 求证: 在实轴上不存在可微函数 $f(x)$, 使其满足

$$f[f(x)] = -x^3 + x^2 + 1.$$

提示: 参看 1.5 题.

4.5 求证: 在实轴上不存在可微函数 $f(x)$, 使其满足

$$f[f(x)] = x^2 - 3x + 3.$$

提示: 参看 1.6 题.

4.6 用函数变换化简方程:

(1) $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$, 令 $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$;

(2) $y'' = 1 + \frac{2(1+y)}{1+y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, 令 $y = \operatorname{tg} z$.

4.7 用自变量变换化简方程:

(1) $(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$, 令 $x = \sin t$;

(2) $x^4y'' + a^2y = 0$, 令 $x = \frac{1}{t}$;

(3) $y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0$, 令 $x = \operatorname{tg} t$.

4.8 求证: $(0 \leq x \leq 1)$.

(1) $\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx$;

$$(2) \sum_{k=0}^n k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2;$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

4.9 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, $f(0)=0$, 而且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = m.$$

求证: $f'(0) = m$.

提示: 利用 ε - δ 说法.

4.10 在平面上动点 P 的位置可以用 P 点分别到两个固定点 O_1, O_2 的距离 r_1 与 r_2 来决定, (r_1, r_2) 叫点 P 的双距坐标.

(1) 平面上的曲线 AB , 可以用 r_2 是 r_1 的某个函数来给出, 令 θ_1 表示 AB 上点 P 对 O_1 的切径角 (向径 O_1P 与切线之间的夹角), θ_2 表示 P 对 O_2 的切径角. 证明:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}.$$

(见图 6)

(2) 接上题, 切径角相等时, AB 是何种曲线.

提示: 利用 $r_1 d\varphi_1 = dr_1 \operatorname{tg} \theta_1$,

$$r_2 d\varphi_2 = dr_2 \operatorname{tg} \theta_2.$$

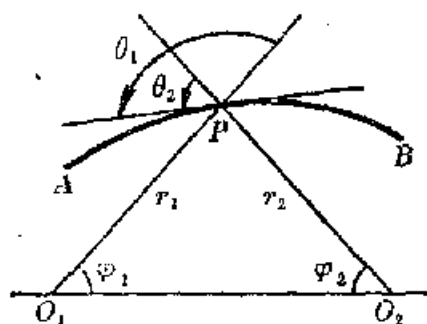


图 6

第五章 利用导数研究函数

罗尔中值定理

5.1.1 设 $f(x) = x^m(1-x)^n$, m, n 为自然数, $x \in [0, 1]$. 则

$\exists \xi \in (0, 1)$, 使

$$\frac{m}{n} = \frac{\xi}{1-\xi}.$$

5.1.2 求证 $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ 在 $(0, 1)$ 间至少有一个根.

5.1.3 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$. 求证: 方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 在 $(0, 1)$ 间至少有一个根.

5.1.4 求证: 方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个.

5.1.5 若 $f(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上 n 次可导, 且在 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 个零点(计其重数). 求证: $f^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少有一个零点.

5.1.6 设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 有 $n+1$ 个零点, 则 $f(x) \equiv 0$.

5.1.7 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 求证: $\exists \xi \in (a, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

5.1.8 设 $f(x)$ 可导. 求证: $f(x)$ 的两个零点之间一定有 $f(x) + f'(x)$ 的零点.

5.1.9 求证: 勒襄德多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ 在 $[-1, 1]$ 内有 n 个零点.

5.1.10 求证: 切比雪夫-拉盖尔多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

有 n 个不同正零点.

5.1.11 求证: 切比雪夫-厄尔米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

有 n 个不同零点.

拉格朗日中值定理

5.1.12 求证:

$$(1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|;$$

$$(2) |\arctg b - \arctg a| \leq |b - a|.$$

5.1.13 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a$. 求证: $\forall T > 0$, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+T) - f(x)] = Ta.$$

5.1.14 设 $f(x) \in C(a, b)$, 除 x_0 外 $f'(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$. 求证: $f'(x_0)$ 存在, 且 $f'(x_0) = A$.

5.1.15 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $f'(x)$ 单调. 证明 $f'(x)$ 在 (a, b) 上连续.

5.1.16 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-r, r)$ 上存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = l$. 求证:

$$f^{(n)}(0) = l.$$

5.1.17 设 $h > 0$, $f'(x)$ 在 $(a-h, a+h)$ 中存在. 求证:

$$(1) \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h) \quad (0 < \theta < 1);$$

$$(2) \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h))}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h) \quad (0 < \theta < 1).$$

5.1.18 设 $a = -1, b > 1, f(x) = |x|^{-1}$.

(1) 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不满足微分中值定理条件;

(2) 若 $b > \sqrt{2} + 1$, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

5.1.19 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

在 $[0, x]$ 上应用中值定理, 得

$$x^2 \sin \frac{1}{x} = x \left(2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi} \right) \quad (0 < \xi < x).$$

即得

$$\cos \frac{1}{\xi} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - x \sin \frac{1}{x}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\xi \rightarrow 0$, 所以由上式得到

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \cos \frac{1}{\xi} = 0.$$

但已知 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \cos \frac{1}{\xi}$ 不存在. 试说明矛盾何在.

5.1.20 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 有界. 求证: $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续.

5.1.21 求证: $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

5.1.22 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$. 求证: $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上不一致连续.

5.1.23 求证: $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

5.1.24 设 $f(x) \in C[a, b]$. 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 L -条件

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (k \text{ 为常数}),$$

当且仅当 $e^{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上满足 L -条件

$$|e^{f(x)} - e^{f(y)}| \leq k'|x - y| \quad (k' \text{ 为常数}).$$

5.1.25 设 $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$, 若 $f'(a) < f'(b)$, 则对 $\forall \eta$:

$$f'(a) < \eta < f'(b),$$

$\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \eta$.

提示: 考虑辅助函数

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a, \\ f'(a), & x = a; \end{cases} \quad \text{或}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, & x \neq b, \\ f'(b), & x = b. \end{cases}$$

哥西中值定理

5.1.26 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上可导, 作函数

$$D(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}.$$

(1) 解释函数 $D(x)$ 的几何意义;

(2) 对 $D(x)$ 应用罗尔定理会得出什么结论.

5.1.27 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微. 求证:
 $\exists \xi \in (a, b)$ 使

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

5.1.28 设 $f(x) \in C[a, b]$ ($b > a > 0$), 在 (a, b) 上可微. 求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使

$$f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi).$$

5.1.29 设 $f(x) \in C[a, b]$ ($ab > 0$), 在 (a, b) 上可微. 求证:
 $\exists \xi \in (a, b)$ 使

$$\frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

5.1.30 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 它们在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 都分别存在有穷极限, 且 $g'(x) \neq 0$. 求证: $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$

使

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

5.1.31 设 $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上连续, 导数存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x)$ 存在. 求证: $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上一致连续.

洛必达法则

5.2.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} nx}{\operatorname{tg} mx}$$

(n, m 为自然数);

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} \quad (k > 0);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right];$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}})$$

($a, b > 0$);

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x^2} \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right).$$

5.2.2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

5.2.3 求下列极限(a, b 为实数):

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1+x^a}{1+x^b} \right)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^a}{1+x^b} \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

5.2.4 设 $f(x)$ 二阶可导, 求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x).$$

5.2.5 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $f'(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b$. 求证: $b=0$.

5.2.6 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = k$ (k 为有限或 $\pm\infty$), 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$.

5.2.7 由拉格朗日中值定理,

$$\ln(1+x) - 0 = x \cdot \frac{1}{1+\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

求证: $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

5.2.8 由拉格朗日中值定理,

$$e^x - 1 = x e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

求证: $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

5.2.9 (1) 求证: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$;

(2) 由拉格朗日中值定理,

$$\arcsin x - 0 = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}} \quad (0 < \theta < 1).$$

求证: $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

皮亚诺余项的泰勒公式

5.3.1 写出下列函数在 $x=0$ 的带有皮亚诺余项的泰勒展式:

(1) $e^{2x};$

(2) $\cos x^2;$

(3) $\ln(1-x);$

(4) $\frac{1}{(1+x)^2};$

(5) $\frac{x^3+2x+1}{x-1};$

(6) $\sin^3 x.$

5.3.2 写出下列函数在 $x=0$ 的泰勒公式至所指的阶数:

(1) $1-x+x^2 \quad (x^3);$

(2) $e^x \cos x \quad (x^4);$

(3) $\frac{x}{\sin x} \quad (x^4);$

(4) $\ln(\cos x + \sin x) \quad (x^4);$

(5) $\frac{x}{2x^2+x-1} \quad (x^3);$

(6) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad (x^4);$

(7) $\ln(1+x+x^2+x^3) \quad (x^6);$

(8) $\ln \frac{1+x}{1-2x} \quad (x^n).$

5.3.3 在 $x=0$ 处将下列函数展开到 x^4 .

(1) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}};$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2+x^4}}.$

5.3.4 设 $f(x)$ 在 x_0 点 n 次可导, 且

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

求证:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n-1}).$$

5.3.5 设 $f(x)$ 在实轴上任意次可导, 令 $F(x) = f(x^2)$. 求证:

$$F^{(2n+1)}(0) = 0, \quad \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

5.3.6 确定常数 a, b , 使 $x \rightarrow 0$ 时,

(1) $f(x) = (a + b \cos x) \sin x - x$ 为 x 的 5 阶无穷小;

(2) $f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

5.3.7 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right];$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

5.3.8 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln \left(n \sin \frac{1}{n} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n \sin (\pi \sqrt{n^2 + 2}).$$

5.3.9 设 $f(x)$ 在原点的邻域二次可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0.$$

(1) 求 $f(0), f'(0), f''(0)$;

$$(2) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right).$$

5.3.10 设 $f(x)$ 在原点的邻域二次可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

(1) 求 $f(0), f'(0), f''(0)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.3.11 设 $f(x)$ 在 $U(a; \delta)$ 上二次可导, 且 $f''(a) \neq 0$. 由微分中值定理:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1, -\delta < h < \delta),$$

求证: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

提示: 写出 $f(a+h)$ 的两种泰勒展式进行比较.

5.3.12 设 $f(x)$ 在 $U(a; \delta)$ 上有 $n-1$ 阶导数, 且 $f^{(n)}(a) \neq 0$ 与 $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$. 由微分中值定理:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1, -\delta < h < \delta),$$

求证: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n-1} \sqrt[n]{n}$.

拉格朗日余项的泰勒公式

5.3.13 (1) 把多项式 $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ 表成 $(x+1)$ 的幂的多项式;

(2) 把多项式 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ 表成 $(x-1)$ 的幂的多项式.

5.3.14 设 $P(x)$ 为一 n 次多项式.

(1) 若 $P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)$ 皆为正数, 证明 $P(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上无根;

(2) 若 $P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)$ 正负号相间, 证明 $P(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上无根.

5.3.15 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, 求证: $x = a$ 是 $P(x) = 0$ 的 k 重根的充要条件是 $P^{(i)}(a) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$), $P^{(k)}(a) \neq 0$.

5.3.16 设 a, b, n 为正整数, 令

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

求证: (1) $f\left(\frac{a}{b}-x\right)=f(x)$;

(2) $f^{(k)}(x)$ ($0 \leq k \leq 2n$) 当 $x=0, x=\frac{a}{b}$ 时取值为整数.

5.3.17 设 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$. 求证:

(1) $P_n(1)=1$;

(2) $P_n(-1)=(-1)^n$;

(3) $P_{2n-1}(0)=0$;

(4) $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$.

5.3.18 设 $f(x)=e^{x^2}$.

(1) 求证: $f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{x^2}$, 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式, 满足 $P_0(x)=1, P_1(x)=2x, P_{n+1}(x)=2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)$;

(2) 求 $f^{(n)}(0)$ 的值.

5.3.19 用泰勒公式求证:

(1) $0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$ ($0 < x \leq 1$);

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]$ 存在.

5.3.20 求证: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}.$$

5.3.21 求证:

(1) $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$ ($0 < \theta < 1$);

(2) e 是无理数.

5.3.22 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a)=f'(b)=0$, 则 $\exists c \in (a, b)$, 使

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

提示: 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 点写出函数的展开式.

5.3.23 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次连续可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证:

$$(1) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|;$$

$$(2) \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \leq \frac{1}{2} (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

提示: 在最大点写出函数的展开式.

5.3.24 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二次可微, 且 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 有 $|f(x)| \leq M_0, |f''(x)| \leq M_2$.

(1) 写出 $f(x+h), f(x-h)$ 的泰勒展开式;

(2) 求证: $\forall h > 0$, 有 $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$;

(3) 求 $\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值;

(4) 求证: $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

5.3.25 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二次可微, 且 $|f(x)| \leq M_0, |f''(x)| \leq M_2$ ($x > 0$). 求证:

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2} \quad (x > 0).$$

5.3.26 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上三次可微, 且 $\forall x \in (0, +\infty)$, 有 $|f(x)| \leq M_0 < +\infty, |f'''(x)| \leq M_3 < +\infty$. 求证: $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

函数的升降与极值

5.4.1 求证: $\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2} \quad (|x| \leq 1).$

5.4.2 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, 并满足

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^2 \quad \forall x, y \in [a, b].$$

求证: $f(x) \equiv \text{常数}$.

5.4.3 已知 $f(1) = 1$.

(1) 若 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x) + f(x) \equiv 0$, 求 $f(2)$;

(2) 若 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x) - f(x) \equiv 0$, 求 $f(2)$.

5.4.4 设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 上可微, $g(x) \neq 0$, 且

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

求证: 存在常数 c , 使 $f(x) \equiv cg(x)$.

5.4.5 求证下列不等式:

$$(1) \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right); \quad (2) \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0);$$

$$(3) e^x > 1 + x \quad (x \neq 0); \quad (4) e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 0);$$

$$(5) \frac{1-x}{1+x} \leq e^{-2x} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

5.4.6 求证下列不等式:

$$(1) \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x > 1);$$

$$(2) \sin x + \cos x > 1 + x - x^2 \quad (x > 0);$$

$$(3) \ln(1+x) \geq \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \quad (x \geq 0).$$

5.4.7 (1) 求证: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上单调下降.

(2) 求证: 圆内接正 n 边形的面积随边数的增加而增加.

5.4.8 求证:

$$(1) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ 在 } x > 0 \text{ 上单调上升};$$

(2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x}$ 在 $x>0$ 上单调下降;

(3) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x} \quad (x>0).$

5.4.9 设 $f(x), g(x)$ 在实轴上连续可微, 且

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0.$$

求证: $f(x)=0$ 的两实根之间一定有 $g(x)=0$ 的根.

5.4.10 设 $f(x)$ 在实轴上可微, 且 $f(x)+f'(x)>0$. 求证:
 $f(x)$ 在实轴上至多只有一个零点.

5.4.11 (1) 求函数 $f(x)=ax-\ln x$ 在 $x>0$ 上的极值;

(2) 求方程 $ax=\ln x$ 有两个正实根的条件.

5.4.12 (1) 求 $f(x)=x^3-px+q$ ($p>0$) 的极值点与极值;

(2) 求方程 $x^3-px+q=0$ 有三个实根的条件.

5.4.13 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上二次可导, 且 $f''(\xi) \neq 0$
($a<\xi<b$). 求证: 在 (a, b) 内可找出两个值 x_1, x_2 , 使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

提示: 先考虑 $f'(\xi)=0$ 情形.

5.4.14 求下列函数的最大值:

(1) $f(x)=x^2\sqrt{a^2-x^2} \quad (0 \leq x \leq a);$

(2) $f(x)=x^n(1-x)^m \quad (0 \leq x \leq 1, n, m \text{ 为正整数});$

(3) $f(x)=x^2e^{-nx} \quad (x \geq 0, n \text{ 为正整数});$

(4) $f(x)=x^\alpha \ln \frac{1}{x} \quad (x>0, \alpha>0).$

5.4.15 设 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可导, 满足

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0 \quad \forall x \in (a, b), c(x)<0.$$

(1) 求证: $y(x)$ 不能在 (a, b) 内部达到正最大或负最小值;

(2) 又设 $y(a) = y(b) = 0$, 则 $y(x) \equiv 0$.

5.4.16 设 $u > e$, 求证方程 $x \ln x = u$ 的根 $x(u)$ 满足:

(1) $x(u) \sim \frac{u}{\ln u} \quad (u \rightarrow +\infty);$

(2) 求 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x > 1$ 上的最大值;

(3) $\frac{u}{\ln u} < x(u) \leq \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{u}{\ln u}.$

5.4.17 设炮口的仰角为 α , 炮弹的初速为 v_0 米/秒, 炮口取作原点, 发炮时间取作 $t = 0$, 不计空气阻力时, 炮弹的运动方程为:

$$\begin{cases} x = t v_0 \cos \alpha, \\ y = t v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

若初速 v_0 不变, 问如何调整炮口的仰角 α , 使炮弹射程最远.

5.4.18 某村计划修建一条断面面积为 4 平方米的梯形渠道, 侧面的坡度为 $\frac{3}{4}$ (即底边与斜高间夹角 θ 满足 $\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4}$), 底边 b 与斜高 l 为多长时湿周最小. (根据经验, 湿周最小时渠道过水能力最大.)

5.4.19 给定曲线 $x = a \cos^4 t, y = a \sin^4 t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, a > 0)$.

(1) 求曲线上一点, 使该点的切线被坐标轴所截的长度 AB 最短;

(2) 求出 AB 的最短长度.

5.4.20 设

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求证: $f'(0) > 0$, 但 $f(x)$ 在 $U(0; \delta)$ 内 (无论多么小的 δ) 不单调上升.

5.4.21 设

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

求证: (1) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大点;

(2) 在 $x=0$ 的任意小邻域内, $f(x)$ 在 $x=0$ 右侧不单调下降, 在 $x=0$ 左侧不单调上升.

函数的凹凸与拐点

5.5.1 求证: $\sqrt{a+bx^2}$ ($a>0, b>0$) 为凸函数.

5.5.2 求证: 不存在三次或三次以上的奇次多项式是凸函数.

5.5.3 求证: 次数 ≥ 2 的凸多项式一定是严格凸的.

5.5.4 求四次多项式是凸函数的条件.

5.5.5 设 $f(x), g(x)$ 是 (a, b) 上的凸函数, 求证: $\max(f(x), g(x))$ 也是 (a, b) 上的凸函数.

5.5.6 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的凸函数, $g(x)$ 是 (c, d) 上单调上升凸函数, 且 $f(x)$ 的值域包含在 (c, d) 内. 求证: $g[f(x)]$ 是 (a, b) 上的凸函数.

5.5.7 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上定义并且取正值. 已知 $-f(x)$ 是凸函数. 求证: $\frac{1}{f(x)}$ 也是凸函数.

5.5.8 设 $f(x)$ 是凸函数, 且二次可导. 求证: $e^{f(x)}$ 也是凸函数.

5.5.9 设 $f(x) > 0, f''(x)$ 存在, 则 $\ln f(x)$ 是凸函数的充要条

件为:

$$\begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ f'(x) & f''(x) \end{vmatrix} \geq 0.$$

5.5.10 求证:

$$(1) |a|^p + |b|^p \geq 2^{1-p}(|a| + |b|)^p \quad (p > 1);$$

$$(2) |a|^p + |b|^p \leq 2^{1-p}(|a| + |b|)^p \quad (0 < p < 1).$$

5.5.11 设 $b \geq a$. 求证:

$$2 \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} \geq \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a.$$

5.5.12 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上二次可导, 且 $f(0) = 0$, $f''(x) < 0$. 求证: $\frac{f(x)}{x}$ 严格单调下降.

5.5.13 设 $f(x)$ 在实轴上可微, 则 $f'(x)$ 单调上升的充要条件是: $\forall h > 0$, 函数 $f(x+h) - f(x)$ 也是单调上升的.

5.5.14 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上 $n (> 2)$ 次可微, 存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 又 $f^{(n)}(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$. 求证: (1) n 为奇数时, $f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调上升;

(2) n 为偶数时, $f(x)$ 在 (a, b) 上为严格凸函数.

5.5.15 设 $n \geq 2, r > 0, f^{(n)}(x)$ 在 $[a-r, a+r]$ 上连续, 并设 $f^{(k)}(a) = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1), f^{(n)}(a) \neq 0$. 求证:

(1) 当 n 为偶数时, a 是极值点;

(2) 当 n 为奇数时, a 是拐点.

5.5.16 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的凸函数. 求证:

(1) 对 $\forall x_0 \in (a, b), f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 存在, 从而 $f(x)$ 在 x_0 点连续;

(2) $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$;

(3) $f'_-(x), f'_+(x)$ 在 (a, b) 上单调上升.

5.5.17 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的. 求证: $\forall x_0 \in (a, b), \exists m \in$

$[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$, 使 $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$.

5.5.18 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上定义, 并且 $\forall x_0 \in (a, b)$, $\exists m$ 使 $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$. 求证: $f(x)$ 是凸的.

5.5.19 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸函数, 且 $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ 存在 (有限数). 求证: $f(x)$ 满足李普希兹条件, 即

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (k \text{ 为常数}).$$

5.5.20 求证: $1 + x^2 \leq 2^x \quad (0 \leq x \leq 1)$.

函数作图

5.6.1 作下列函数的图形:

$$(1) \quad y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}; \quad (2) \quad y = \frac{x^4}{(1+x)^3};$$

$$(3) \quad y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}; \quad (4) \quad y = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

5.6.2 作下列函数的图形:

$$(1) \quad y = (1+x^2)e^{-x^2}; \quad (2) \quad y = x^3 e^{-x}.$$

5.6.3 作下列函数的图形:

$$(1) \quad y = \sin^3 x + \cos^3 x \quad (0 \leq x \leq 2\pi);$$

$$(2) \quad y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

5.6.4 (1) 作 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图形;

(2) 设 $e^{bx} = ax^2 \quad (a > 0, b > 0)$, 令 $t = \sqrt{a}x$. 求证:

$$\frac{\ln t}{t} = \frac{b}{2\sqrt{a}};$$

(3) 求方程 $e^{bx} = ax^2 \quad (a > 0, b > 0)$ 有两个正实根的条件.

5.6.5 作 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的图形. 方程 $x^3 - x^2 - x + k = 0$ 当 k 取何值时有三个实根?

5.6.6 求方程 $\frac{1}{\sin x} + \frac{3\sqrt{3}}{\cos x} = \lambda$ (λ 为常数) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的实根个数.

方 程 求 根

5.7.1 用切线法求方程 $x^3 - 2 = 0$ 的正根. 已知 $x_1 = 2$, 迭代六次计算到 x_6 .

5.7.2 用切线法求 $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{5}$ (计算到 x_n 与 x_{n+1} 小数后第四位相同为止).

5.7.3 设 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域 $U(x_0; \delta)$ 上一次可微, $f(x_0) = 0$, 且

$$q = \sup_{x \in U(x_0; \delta)} |1 - \alpha f'(x)| < 1 \quad (\alpha \text{ 为常数}).$$

求证: 由公式 $x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n)$ $x_1 \in U(x_0; \delta)$ 得到的序列 $\{x_n\}$ 趋向于 x_0 .

* * *

5.1 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上二次可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

求证: (1) $\exists x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$;

(2) $\exists \xi \in (a, +\infty)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

5.2 设 $f_0(x) \equiv 1$, $f_{k+1}(x) = xf_k(x) - f'_k(x)$. 求证:

(1) $f_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次多项式;

(2) $f_n(x)$ 有 n 个不同实根.

5.3 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导. 证明: $f'(x)$ 单调上升的充要条件为 $f(x) - xf'(x)$ 单调下降.

5.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(x)$ 非线性函数. 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

5.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, $\forall x, h$, 成立

$$f(x+h) - f(x) = hf' \left(x + \frac{1}{2}h \right).$$

求证: (1) $f(x)$ 任意次可微;

(2) $f(x)$ 是不超过二次的多项式.

5.6 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内无穷次可微, 对 $\forall x \in (a, b)$, $f^{(n)}(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $|f(x)| \leq M$. 求证: $\forall x \in (a, b)$, $r > 0$, 只要 $x+r \in (a, b)$, 便有

$$f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{r^n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

5.7 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内无穷次可微; 且 $f^{(n)}(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$) 对 $\forall x \in (a, b)$ 成立. 求证: $\forall x_0 \in (a, b)$, $\exists r > 0$, 使对 $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

5.8 设 $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 1$ ($0 \leq x \leq 2$). 求证: $|f'(x)| \leq 2$ ($0 \leq x \leq 2$).

提示: 写出函数在 x 点的展开式.

5.9 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 n 次可微, 且

$$|f(x)| \leq M_0, |f^{(n)}(x)| \leq M_n \quad (M_0, M_n \text{ 为常数}).$$

求证: (1) $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界;

$$(2) |f^{(k)}(x)| \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n} \quad (0 \leq k \leq n).$$

5.10 设 $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, x_m 是 $P_{2m+1}(x) = 0$ 的

实根. 求证: $x_m < 0$, 且 $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = -\infty$.

5.11 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为可导凸函数, 且

$$f(x) = x^2 + x^2 \cdot e(x) \quad (e(x) \rightarrow 0, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty).$$

求证: (1) $\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \leq f'(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\left(0 < h \leq \frac{x}{2}\right);$$

(2) $\forall \eta > 0$, 当 x 充分大时, 有

$$2x - h - \frac{\eta}{h}x^2 \leq f'(x) \leq 2x + h + \frac{\eta}{h}x^2 \quad \left(0 < h \leq \frac{x}{2}\right);$$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 1;$

(4) 若 $f(x)$ 非可导凸函数, 那末由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, 能否得出

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 1?$$

5.12 给定方程 $x^n + x = 1$ (n 为自然数), 求证:

(1) 在 $x > 0$ 上方程有唯一解 x_n ;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1;$

(3) $1 - x_n \sim \frac{\ln n}{n} \quad (n \rightarrow +\infty).$

5.13 证明: 函数 $2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为 1.

提示: 用反证法.

第六章 不定积分

原函数与不定积分

6.1.1 求出 x^3 的一个原函数 $F(x)$, 并满足 $F(1) = 1$.

6.1.2 已知 $f(x)$ 满足给定的关系式, 试求 $f(x)$:

- (1) $xf'(x) = 1 \quad (x > 0)$; (2) $\frac{f'(x)}{x} = 1 \quad (x > 0)$;
 (3) $f(x)f'(x) = 1 \quad (x > 0)$; (4) $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \quad (f(x) > 0)$.

6.1.3 对曲线上任意一点 P , 过 P 点作曲线的切线, 若切线与 OP 连线所夹的角为一常角 β , 试求出该曲线.

提示: 利用极坐标.

不定积分的线性性质

6.2.1 求下列不定积分:

- (1) $\int x^2 \sqrt{x} dx$; (2) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{x}} dx$;
 (3) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x^3}} \right) dx$; (4) $\int (x^2 + 1)^2 dx$;
 (5) $\int (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) dx$; (6) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$;
 (7) $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$; (8) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx$;
 (9) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$; (10) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$;
 (11) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} dx$; (12) $\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) dx$;
 (13) $\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx$; (14) $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$.

提示: (13), (14) 题的分子加一项减一项.

6.2.2 求下列不定积分:

- (1) $\int (5 \sin x - 3 \cos x) dx$; (2) $\int \frac{2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$;
 (3) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; (4) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$;

$$(5) \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx; \quad (6) \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

第一换元法

6.3.1 用线性代换计算下列积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int e^{-\frac{x}{2}} dx; & (2) \int \sin \frac{x}{2} dx; \\ (3) \int \cos ax dx; & (4) \int \frac{dx}{\sin^2 ax}; \\ (5) \int \frac{dx}{\cos^2 7x}; & (6) \int \frac{dx}{3x-4}; \\ (7) \int \frac{x dx}{1-x}; & (8) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}; \\ (9) \int \sqrt[3]{1-3x} dx; & (10) \int x \cdot \sqrt[3]{1-3x} dx; \\ (11) \int \frac{dx}{2+3x^2}; & (12) \int \frac{dx}{2-3x^2}; \\ (13) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}; & (14) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \\ (15) \int \frac{dx}{1+\cos x}; & (16) \int \frac{dx}{1+\sin x}. \end{array}$$

6.3.2 用适当代换求下列积分:

$$\begin{array}{ll} (1) \int x(1+x^2)^5 dx; & (2) \int \frac{x dx}{1+x^2}; \\ (3) \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx; & (4) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ (5) \int x e^{-x^2} dx; & (6) \int \frac{x}{4+x^4} dx; \\ (7) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx; & (8) \int \frac{dx}{1+e^x}; \end{array}$$

$$(9) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$$

$$(10) \int 3^x e^x dx;$$

$$(11) \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x \cdot b^x} dx;$$

$$(12) \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx;$$

$$(13) \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$$

$$(14) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$$

$$(15) \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}}};$$

$$(16) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$(17) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$$

$$(18) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

6.3.3 求下列三角函数的积分:

$$(1) \int \cos 2x \cdot \sin 4x dx; \quad (2) \int \sin x \cdot \sin 3x dx;$$

$$(3) \int \cos 4x \cdot \cos 7x dx; \quad (4) \int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3}{4} x dx;$$

$$(5) \int \cos^2 \omega x dx; \quad (6) \int \sin^2 x \cos^2 x dx;$$

$$(7) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx; \quad (8) \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx;$$

$$(9) \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx; \quad (10) \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$$

6.3.4 求下列有理函数的积分:

$$(1) \int \frac{x+1}{1-x} dx; \quad (2) \int \frac{-x^2+2x-5}{x-1} dx;$$

$$(3) \int \frac{x^3}{3+x} dx; \quad (4) \int \frac{5-4x}{3x-2} dx;$$

$$(5) \int \frac{6x^4-5x^3+4x^2+1}{(x-2)^4} dx; \quad (6) \int \frac{1+x^2}{(1-x)^2} dx.$$

提示: (5), (6)题利用泰勒公式.

第二换元法

6.3.5 用适当代换求下列函数积分($a>0$):

$$(1) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx; \quad (2) \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}; \quad (4) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}; \quad (6) \int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

6.3.6 求下列函数积分($a>0, b>0$):

$$(1) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx; \quad (2) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}; \quad (4) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}};$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}; \quad (6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}; \quad (8) \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx;$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}; \quad (10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}.$$

分部积分法

6.4.1 求下列不定积分:

$$(1) \int \ln(1+x^2) dx; \quad (2) \int x^\alpha \ln x dx \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(3) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx; \quad (4) \int x e^{-3x} dx;$$

$$(5) \int x^2 e^{-2x} dx; \quad (6) \int x \cos nx dx;$$

$$(7) \int x^2 \sin 2x dx;$$

$$(8) \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$(9) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$(10) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$$

$$(11) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$$

$$(12) \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$$

6.4.2 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$$

$$(2) \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$$

6.4.3 求下列不定积分:

$$(1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

$$(2) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

6.4.4 求下列不定积分:

$$(1) \int \sin(\ln x) dx;$$

$$(2) \int \cos(\ln x) dx;$$

$$(3) \int x e^x \cos x dx;$$

$$(4) \int x e^x \sin x dx.$$

6.4.5 建立递推公式:

$$(1) I_n = \int \sin^n x dx;$$

$$(2) I_n = \int x^n e^{-x} dx;$$

$$(3) I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(4) I_n = \int x^n (\ln x)^n dx (n \text{ 固定}).$$

有理函数的积分

6.5.1 求下列函数的积分:

$$(1) \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)} dx;$$

$$(4) \int \frac{2x-3}{x^2+2x+1} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx; \quad (6) \int \frac{1}{8 - 2x - x^2} dx;$$

$$(7) \int \frac{x^3}{x^4 + 5x^2 + 4} dx; \quad (8) \int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx.$$

6.5.2 求下列函数的积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 12}; \quad (2) \int \frac{2x^3 + 3x - 2}{1 + x^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx; \quad (4) \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)};$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^4 - 1}; \quad (6) \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

6.5.3 (1) 利用代换 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 求积分

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} \quad (m, n \text{ 为自然数});$$

(2) 求积分

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 (x+3)^3}.$$

三角函数有理式的积分

6.6.1 求下列函数积分:

$$(1) \int \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x dx; \quad (2) \int \cos x \cdot \sin^2 x dx;$$

$$(3) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx; \quad (4) \int \operatorname{tg}^3 x dx;$$

$$(5) \int \sin^5 x dx; \quad (6) \int \cos^4 x \sin^3 x dx;$$

$$(7) \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx; \quad (8) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x};$$

$$(9) \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx; \quad (10) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

6.6.2 求下列函数积分:

- (1) $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x dx$; (2) $\int \sec^4 x dx$;
(3) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$; (4) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$;
(5) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; (6) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$.

6.6.3 求下列函数积分:

- (1) $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$; (2) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;
(3) $\int \frac{d\theta}{2\sin \theta - \cos \theta}$; (4) $\int \frac{d\theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad (0 < r < 1)$.

6.6.4 (1) 求积分:

$$\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx;$$

(2) 求积分

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

6.6.5 建立递推公式:

- (1) $I_n = \int \cos^n x dx$; (2) $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx$.

无理函数的积分

6.7.1 求下列不定积分:

- (1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx$; (2) $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx$;
(3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; (4) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$.

6.7.2 求下列不定积分:

- (1) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$; (2) $\int \sqrt{x + \frac{1}{x}} dx$.

6.7.3 求下列不定积分:

$$\begin{aligned}(1) \int x\sqrt{x^2-2x+2}dx; & \quad (2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}; \\ (3) \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx; & \quad (4) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}}.\end{aligned}$$

6.7.4 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}; \quad (2) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

*

*

*

6.1 求下列不定积分:

$$\begin{aligned}(1) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}; & \quad (2) \int \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}; \\ (3) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}dx; & \quad (4) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{1+x^2}dx; \\ (5) \int \sqrt{\lg x}dx; & \quad (6) \int \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^4 x}}; \\ (7) \int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx; & \quad (8) \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx.\end{aligned}$$

6.2 对曲线上任意一点 P , 过 P 点作曲线的切线, 若 OP 线段在切线上的投影之长为一常量, 试求出该曲线.

第七章 定 积 分

定积分概念

7.1.1 按定义判断下列函数在给定区间上是否可积? 倘若可积, 试求出其积分值.

(1) $f(x)=1$, 在 $[-1, 1]$;

(2) $f(x) = x$, 在 $[-1, 1]$;

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{当 } |x| \leq 1, x \neq 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$

7.1.2 已知下列函数可积, 用定义求下列积分, 分法任意 ($b > a > 0$).

(1) $\int_a^b x dx$ (按算术平均值取点);

(2) $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx$ (按几何平均值取点).

7.1.3 利用定积分的几何意义, 求下列积分:

(1) $\int_a^b x dx$; (2) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$;

(3) $\int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx$.

7.1.4 设 $f(x) \in R[a, b]$ ($R[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上的可积函数全体). 求证:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right);$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}\right);$$

$$(3) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + 2f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right) + f(b) \right].$$

7.1.5 设:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = c, \quad (a < c < b); \\ 0, & a \leq x < c, \quad c < x \leq b. \end{cases}$$

求证:

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

7.1.6 设 $f(t)$ 在 $[a+c, b+c]$ 上可积. 证明: $f(x+c)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t) dt.$$

7.1.7 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且为凸函数. 求证:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

提示: 采用区间等分, 取中点.

微积分基本定理

7.2.1 若 $F(x) = \arctg \frac{1}{x}$, 那么 $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, 积分

$$\int_{-1}^1 -\frac{1}{1+x^2} dx$$

应取负值; 但从另一方面看,

$$\int_{-1}^1 -\frac{dx}{1+x^2} = \arctg \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

问错误何在?

7.2.2 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^\pi \cos^2 x dx;$$

$$(2) \int_0^a \sqrt{a-x} dx;$$

$$(3) \int_0^a x \sqrt{a-x} dx;$$

$$(4) \int_{-4}^{-3} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-4}}.$$

7.2.3 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\pi}{n};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (2n-1)}.$$

7.2.4 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \frac{2n}{n^2 + k^2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2;$$

$$(2) \text{ 若 } S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{k\theta}{n}, \text{ 则}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\theta \rightarrow 0} S_n(\theta) = 1.$$

7.2.5 求下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi} \cos x dx; \quad (2) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad (4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi),$$

$$(5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}; \quad (6) \int_a^b \sin |x| dx;$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a, b > 0);$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a, b > 0);$$

$$(9) \int_{-1}^1 |1-x| dx; \quad (10) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

可积函数

7.3.1 判断下列函数的可积性:

$$(1) f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上有界, 不连续点为 } x = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, x=\frac{1}{n}, \\ \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), & 0 < x \leq 1, x \neq \frac{1}{n}; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1/\left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

7.3.2 求证: 当

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$$

时, 达布大和以上积分为极限; 达布小和以下积分为极限.

7.3.3 设:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0); f^-(x) = \min(f(x), 0).$$

求证: $f(x) \in R[a, b]$ 的充分且必要条件是 $f^+(x) \in R[a, b]$ 与 $f^-(x) \in R[a, b]$ 同时成立.

7.3.4 设 $\max(f(x), g(x)) \in R[a, b]$, $\min(f(x), g(x)) \in R[a, b]$. 求证: $f(x) \cdot g(x) \in R[a, b]$.

7.3.5 设 $f(x) \in R[a, b]$, 求证:

$$e^{f(x)} \in R[a, b].$$

7.3.6 设 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $f(x) \geq \alpha > 0$. 求证:

$$(1) \frac{1}{f(x)} \in R[a, b]; \quad (2) \ln f(x) \in R[a, b].$$

提示: 利用微分中值定理.

7.3.7 设 $f(x) \in R[a, b]$. 求证: $\forall \varepsilon > 0$, 存在逐段为常数的函数 $\varphi(x)$, 使

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

7.3.8 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 定义

$$\omega_f[a, b] = \sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

求证:

$$\omega_f[a, b] = \sup_{x', x'' \in [a, b]} |f(x') - f(x'')|.$$

7.3.9 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义且有界. 定义

$$\omega_f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_f\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right).$$

求证: $f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件为 $\omega_f(x_0) = 0$.

7.3.10 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$. 求证:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(\eta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

其中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$),
 $x_0 = a, x_n = b, \lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$.

定积分性质

7.4.1 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

求证: $f(x) \equiv 0$ ($a \leq x \leq b$).

7.4.2 设:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i & x = c_i \in [a, b], i = 1, 2, \dots, m, \\ 0 & x \in [a, b] \text{ 但 } x \neq c_i, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

求证: $\int_a^b f(x) dx = 0$.

7.4.3 设 $f(x) \in R[a, b]$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 只在有限个点上取值不等. 求证: $g(x) \in R[a, b]$, 且

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

7.4.4 求证:

(1) 若 $t > 0$, 则

$$\ln t \leq t - 1;$$

(2) 若 $f(x) \in R[a, b]$, $f(x) \geq \alpha > 0$, 则

$$\int_0^1 \ln f(x) dx \leq \ln \int_0^1 f(x) dx;$$

(3) 若 $f(x) \in R[a, b]$, 则

$$e^{\int_0^1 f(x) dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)} dx;$$

(4) 设 $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), 则

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

提示: 利用 7.3.5 和 7.3.6 题.

7.4.5 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$. 求证:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx},$$

而且等号成立当且仅当 $g(x) = \lambda f(x)$ (或 $f(x) = \lambda g(x)$), 其中 λ 为常数.

提示: 利用对一切实数 t ,

$$\int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0.$$

7.4.6 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$. 求证:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx},$$

而且等号成立当且仅当 $g(x) = \lambda f(x)$ ($\lambda \geq 0$ 常数).

7.4.7 设 $f(x) \in R[0, 1]$, $f(x) \geq \alpha > 0$. 求证:

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

7.4.8 求证:

$$(1) \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq 1;$$

$$(2) \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 1.$$

提示: 参看 5.4.5 题.

7.4.9 设

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

试建立 I_n 的递推公式; 并利用所得结果证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] = \ln 2.$$

7.4.10

(1) 试建立 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt$ 的递推公式;

(2) 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt = 1.$$

7.4.11 证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^b (1-x^2)^n dx = 0 \quad (0 < b < 1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 0;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

7.4.12

(1) 任给 $\delta > 0$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\delta}^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 0;$$

(2) 设 $f(x) \in C[-1, 1]$, 令

$$\lambda_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt.$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n f(t) dt = f(0).$$

7.4.13 设 $a, b > 0$, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \in R[a, b]$, 又知

$$\int_{-a}^b x f(x) dx = 0.$$

求证:

$$\int_{-a}^b x^2 f(x) dx \leq ab \int_{-a}^b f(x) dx.$$

7.4.14 设 $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$, 对 $\forall x \in [a, b]$ 成立. 求证:

$$f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

7.4.15 设 $f(x) \in C[a, b]$. 求证: $f(x)$ 是凸的充分必要条件是

$$f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt$$

对 $\forall [x-h, x+h] \subset [a, b]$ 时成立.

7.4.16 设 $f'(x) \in C[a, b]$. 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

7.4.17 设 $f(x) \in R[a, b]$. 求证: 函数 $f(x)$ 具有积分的连续性, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

这里假设当 x 在区间 $[a, b]$ 外时, $f(x)$ 的取值为零.

7.4.18 我们称函数 $S(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的阶梯函数, 是指区间 $[a, b]$ 可以分割为有限个子区间, 而 $S(x)$ 在每一个子区间上

取常数值. 求证:

(1) 阶梯函数一定可积;

(2) 若 $f(x) \in R[a, b]$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在两个阶梯函数 $S_1(x), S_2(x)$, 满足:

$$S_1(x) \leq f(x) \leq S_2(x), \quad a \leq x \leq b,$$

且

$$\int_a^b (f(x) - S_1(x)) dx < \varepsilon; \quad \int_a^b (S_2(x) - f(x)) dx < \varepsilon.$$

7.4.19 设 $f(x) \in R[a, b]$. 求证: 存在连续函数序列 $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \dots$, 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

变限定积分

7.5.1

(1) 设

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是否可积?

(2) 举出一反例, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $f(x)$ 在 x_0 间断, 但

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' \Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

7.5.2 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 并存在常数 a 满足

$$5x^3 + 40 = \int_a^x f(t) dt.$$

(1) 求出 $f(x)$;

(2) 定出常数 a .

7.5.3 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 求出下列函数的导数.

$$(1) F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt;$$

$$(2) F(x) = \int_{x+a}^{x+b} f(t) dt.$$

7.5.4 求下列极限:

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_0^h \left(\frac{1}{\theta} - \operatorname{ctg} \theta \right) d\theta;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt.$$

7.5.5 求下列函数在原点的导数 $F'(0)$:

$$(1) F(x) = \int_0^x t \sin \frac{1}{t} dt; \quad (2) F(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt.$$

7.5.6 求下列函数:

$$(1) f(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t dt; \quad (2) f(x) = \int_0^x |t| dt;$$

$$(3) f(x) = \int_0^1 |x-t| dt; \quad (4) f(x) = \int_0^1 t |x-t| dt.$$

7.5.7 设 $f(x)$ 在正实轴上连续, 且满足关系式:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} x f(x) \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

求证: $f(x) = cx$ (c 为常数).

7.5.8 设 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时连续, 对 $\forall a, b > 0$, 积分值

$$\int_a^{ab} f(x) dx$$

与 a 无关. 求证: $f(x) = \frac{c}{x}$ (c 为常数).

7.5.9 设 $f'(x) \in R[a, b]$, $f(a) = 0$, 求证:

$$(1) |f(x)| \leq \int_a^x |f'(t)| dt;$$

$$(2) \int_a^b f^2(x) dx \leq (b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

7.5.10 设 $f'(x) \in R[a, b]$. 求证: $f(x)$ 可以分解成两个单调增加函数之差.

7.5.11 设 $P_n(x)$ 为 n 次代数多项式. 求证:

$$\int_a^b |P'_n(x)| dx \leq 2n \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|.$$

7.5.12 设 $f(x) \in C[a, b]$, 单调增加. 求证:

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

提示: 把 b 换成 t , 考虑辅助函数.

7.5.13 设 $f(x)$ 在任一有限区间上可积分, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l.$$

7.5.14 设 $f(x)$ 是实轴上不恒为常数的单调函数, 对 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$, 满足方程

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

求证:

- (1) $f(0) = 1$;
- (2) $f(x) > 0$;
- (3) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;
- (4) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微;
- (5) 求 $f(x)$ 所满足的微分方程; 若 $f(1) = 2$, 求出 $f(x)$.

提示: 利用 7.1.6 题.

换 元 法

7.6.1 计算下列积分:

- (1) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^a} dx;$ (2) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx;$
 (3) $\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx;$ (4) $\int_0^a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx;$
 (5) $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} (a>0);$ (6) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx;$
 (7) $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx;$ (8) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x} dx;$
 (9) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$ (10) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a>0);$
 (11) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx;$ (12) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a>0);$
 (13) $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$ (14) $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} dx.$

7.6.2 求证:

- (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} dr = 2\pi \quad (0<r<1);$
 (2) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n) \sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$

7.6.3 求证:

- (1) $\int_0^\pi \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} \pi/2, & k=n, \\ 0, & k \neq n; \end{cases}$
 (2) $\int_0^{\pi/2} \cos nx \cos^n x dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$

7.6.4 设

$$I_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx.$$

- (1) 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0;$
 (2) 求证: 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot I_n$ 存在, 并求出此极限值.

7.6.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 求证: $f(x)$ 是周期为 2π 的函数的充分必要条件是积分

$$\int_0^{2\pi} f(x+y) dx$$

与 y 无关.

7.6.6 求证: 当 n 为奇数时,

$$F(x) = \int_0^x \sin^n t dt$$

是以 2π 为周期的周期函数; 而当 n 为偶数时, $F(x)$ 是线性函数与周期函数的和.

7.6.7 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 求证: 函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

7.6.8 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的凸函数. 求证: 函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

是 $[0, +\infty)$ 上的凸函数.

7.6.9 给定积分 $I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx$, $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数. 求证:

$$(1) I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx;$$

$$(2) \text{ 求 } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

7.6.10 设 $f(x) \in C[A, B]$, $A < a < b < B$. 求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dx = f(b) - f(a).$$

7.6.11 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

分部积分法

7.6.12 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx; \quad (2) \int_0^1 x(\operatorname{arctg} x)^2 dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx; \quad (4) \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)^2}; \quad (6) \int_1^2 \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2} dx;$$

$$(7) \int_0^1 x^2(1-x^3)^5 dx; \quad (8) \int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx;$$

$$(9) \int_1^2 x^2 \ln x dx; \quad (10) \int_0^1 x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$$

7.6.13 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} e^{\alpha x} \sin \beta x dx; \quad (2) \int_0^{\pi/2} e^{\alpha x} \cos \beta x dx.$$

7.6.14 求下列定积分, 其中 n 与 m 为正整数.

$$(1) \int_0^1 x^n \ln^n x dx; \quad (2) \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \lg^{2n} x dx; \quad (4) \int_0^{2\pi} \sin^n x \cos^m x dx$$

($n+m$ 为奇数).

提示: 先建立递推公式.

7.6.15 设

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos nx}{\cos^n x} dx.$$

求证:

$$I_n = 2^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k 2^{k/2}} \right).$$

7.6.16 设

$$a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx.$$

(1) 求证: $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$;

(2) 求证: $a_n \leq a_{n-1} \leq a_{n-2}$;

(3) 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

7.6.17 设 $f'(x) \in C[0, 1]$. 求证:

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty);$$

若只假设 $f(x) \in C[0, 1]$, 上式是否成立?

7.6.18

(1) 设 $f''(x) \in C[0, 1]$. 求证:

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow +\infty);$$

(2) 求证:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

7.6.19

(1) 设 $f(x) \in R[0, 1]$. 求证:

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty);$$

(2) 求证:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

7.6.20 假若 π 是有理数, 即 $\pi = \frac{a}{b}$, a, b 为不可约的正整数.

令

$$f(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!}.$$

(1) 证明: $\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$ 为一整数;

(2) 由此证明 π 不可能为一有理数.

提示: 利用 5.3.16 题.

7.6.21 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且在 (a, b) 上有 m 个相异零点, 又设

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad (n=0, 1, \dots, m).$$

求证: $f(x) \equiv 0 \quad (a \leq x \leq b)$.

提示: 用数学归纳法.

7.6.22 设 $f'(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a) = 0$. 求证:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

7.6.23 设 $f''(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x) (x-a)(x-b) dx;$$

$$(2) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

7.6.24 设 $f'(x) \in C[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, 且 $\int_a^b f^2(x) dx = 1$.

求证:

$$(1) \int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2};$$

$$(2) \int_a^b f'^2(x) dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x) dx > \frac{1}{4}.$$

7.6.25 设 $f''(x)$ 在 (a, b) 上连续, $\forall x_0 \in (a, b), r > 0$, 使 $x_0 \pm r \in (a, b)$. 求证: $\exists \xi \in (x_0 - r, x_0 + r)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{3}{r^3} \int_{x_0-r}^{x_0+r} [f(x) - f(x_0)] dx.$$

积分第二中值定理

7.6.26 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \quad (p > 0).$$

7.6.27 设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调有界. 求证:

$$(1) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \lambda x dx = 0;$$

$$(2) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

7.6.28 设

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt.$$

求证: 当 $x > 0$ 时,

$$|f(x)| < \frac{1}{x}.$$

7.6.29 设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调下降. 求证:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \geq 0.$$

7.6.30 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调下降. 求证:

$$b_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2nx dx \geq 0;$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin (2n+1)x dx \leq 0.$$

7.6.31 设 $f(x)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的凸函数, $f'(x)$ 有界. 求证:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \geq 0.$$

7.6.32 设 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的凸函数, $f'(x)$ 有界. 求证:

$$a_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx \geq 0;$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2n+1)x dx \leq 0.$$

7.6.33 设 $e^2 < a < b$. 求证:

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x} < \frac{2b}{\ln b}.$$

提示: $2b = 2\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$.

7.6.34 设

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求证:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(2x) - F(x)}{x} = 0; \quad (2) F'(0) = 0.$$

提示: 参看 4.9 题.

7.6.35 设 $p < 3$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin \frac{n}{x}}{x^p} dx = 0.$$

7.6.36 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调下降. 求证:

(1) $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\int_0^1 f(x) dx = \theta f(0) + (1 - \theta) f(1);$$

(2) $\forall c > f(0)$, $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\int_0^1 f(x) dx = \theta c + (1 - \theta) f(1).$$

7.6.37 设 $F(x)$ 是在 $[0, +\infty)$ 上单调增加的正值函数, y 是微分方程

$$y'' + F(x)y = 0$$

的解. 求证: y 在 $[0, \infty)$ 上有界.

提示:考虑表达式

$$\frac{2y'y''}{F(x)} + 2y'y$$

的积分.

近 似 计 算

7.7.1 利用 $n=12$ 时的矩形公式, 近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx,$$

并把结果同精确结果相比较.

7.7.2 利用梯形公式计算下列积分, 并估计误差.

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8); \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad (n=10).$$

7.7.3 利用辛卜生公式计算下列积分, 并估计误差.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8); & \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad (n=10); \\ (3) \int_1^9 \sqrt{x} dx \quad (n=16); & \quad (4) \int_0^{\pi/4} \cos x^2 dx \quad (n=10); \\ (5) \int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x} dx \quad (n=6); & \quad (6) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n=10). \end{aligned}$$

7.7.4 依辛卜生公式计算积分

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

精确到 10^{-4} .

7.7.5 设 $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$, 令

$$W(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t) dt - \frac{x}{3} [f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)],$$

其中 $c = \frac{a+b}{2}$, $x \in [0, L]$, $L = \frac{b-a}{2}$.

(1) 求 $W(0)$, $W'(0)$, $W''(0)$, $W^{(3)}(x)$;

(2) 证明:

$$W(L) = \frac{1}{2} \int_0^L W^{(3)}(x)(x-L)^2 dx;$$

(3) 证明: $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$W(L) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

* * *

7.1

(1) 设 $x \geq 0$, n 为自然数, 求证:

$$x^n \geq n(x-1) + 1;$$

(2) $\forall n$, 求证:

$$\int_0^{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} x^n dx > 2;$$

(3) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{a_n} x^n dx = 2.$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$

7.2 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $\int_0^1 f(x)x^k dx = 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$),

且 $\int_0^1 f(x)x^n dx = 1$, 求证: $\exists \xi \in (0, 1)$ 使 $|f(\xi)| \geq 2^n(n+1).$

提示: 考虑函数 $f(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$

7.3 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 并且 $f(x)$ 单调下降, $0 \leq g(x) \leq 1$, 记 $\lambda = \int_a^b g(x) dx$. 求证:

$$\int_{b-\lambda}^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

提示: 利用第一中值定理.

7.4 设 $f'(x) \in C[0, 1]$, 且满足 $0 \leq f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$. 求证:

$$\int_0^1 f^3(x) dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

提示: 参看 7.5.12 题.

7.5 设 $f(x)$ 在实轴上有界且可微, 并满足

$$|f(x) + f'(x)| \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

求证: $|f(x)| \leq 1$.

提示: 乘一适当因子后用基本定理.

7.6 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $0 \leq f'(x) \leq f(x)$, $f(0) =$

0. 求证: $f(x) \equiv 0$.

提示: 在区间 $[0, b]$ 上考虑.

7.7 设 $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$, $\forall \xi \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\eta \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

(1) 求证: $|f'(x)| \leq 3|f(\xi) - f(\eta)| + \int_0^1 |f''(x)| dx$;

(2) 求证: $|f'(x)| \leq 9 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$.

7.8 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, $f(x) > 0$, 并且

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \leq (f(x))^2 \text{ 对 } \forall x \geq 1 \text{ 成立.}$$

(1) 求证: $F'(x) \geq \sqrt{F(x)}$;

(2) 求证: $f(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)$;

(3) 若 $\int_1^x f(t) dt \leq (f(x))^3$, 求证: $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)$
($x \geq 1$).

7.9 设 $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$. 求证:

(1) $\forall x \in (a, b)$, 有

$$\left| f(x) \cdot \frac{b-a}{(x-a)(x-b)} \right| \leq \int_a^b |f''(x)| dx;$$

$$(2) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \cdot \frac{1}{(b-a)} \leq \int_a^b |f''(x)| dx.$$

7.10 (1) 设 $f(x)$ 单调上升, $f(0) > 0$. 求证:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(f(0) + f(1))^2}{4f(0)f(1)};$$

(2) 设 $a_i \geq 0, i = 1, 2, 3, a_1 + a_2 + a_3 = 1, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. 求证:

$$1 \leq \left(\sum_{i=1}^3 a_i \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\lambda_i} \right) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}.$$

提示: 考虑 $[f(0), f(1)]$ 上的凸函数 $y = \frac{1}{x}$, 及联接此函数曲线端点的弦 $y = l(x)$ (图 7). 由于

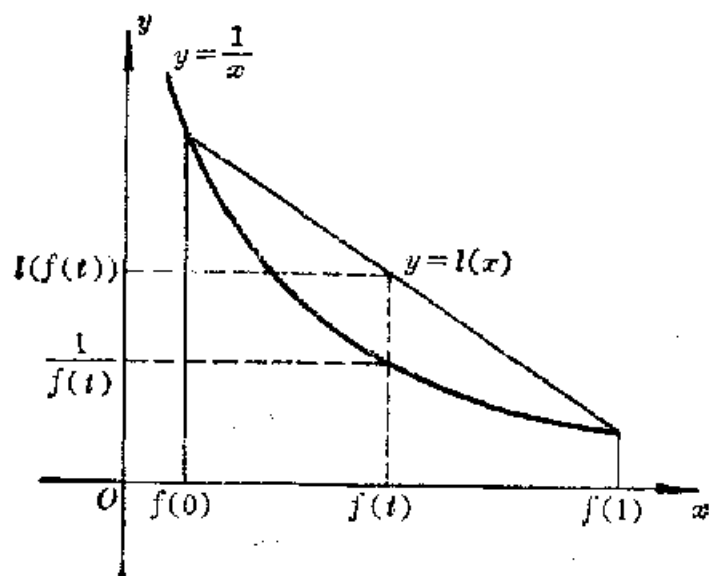


图 7

$$l\left(\int_0^1 f(t) dt\right) = \int_0^1 l(f(t)) dt \geq \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt,$$

有

$$\int_0^1 f(t) dt \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \leq \max_{f(0) \leq x \leq f(1)} \{x \cdot l(x)\}.$$

7.11 (1) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且单调递减. 求证:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx;$$

(2) 设 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. 求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}};$$

(3) 设 $a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \frac{1}{n}} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}}$. 求证: 序列

a_n 存在极限, 并证明此极限值在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间.

7.12 设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$.

(1) 若 $f(0) = 0, f'(0) \geq 0, f''(x) \geq 0$ ($a \leq x < +\infty$). 求证:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f(a_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k\right);$$

(2) 求证: 当 $p > 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k^p \geq \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k\right)^p.$$

提示: 转化为比较导数的积分.

7.13 设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上增加. 求证: $\forall c \in (a, b)$, 有

$$f(x) = \int_c^x g(t) dt$$

是凸函数.

提示: 利用割线斜率递增性.

7.14 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸的. 求证: $\forall c, x \in (a, b)$, 有

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'_-(t) dt = \int_c^x f'_+(t) dt.$$

提示: 对区间 $[c, x]$ 进行分割, 一次取左端点作黎曼和, 一次取右端点作黎曼和.

7.15 求证:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$$

7.16 请按下列提示的思路证明: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 单调增加, 则

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

思路一: 对积分 $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx$ 分段使用第一中值定理.

思路二: 对积分 $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx$ 使用第二中值定理.

思路三: 从 $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) dx \geq 0$ 出发.

思路四: 从

$$(t-x)(f(t)-f(x)) \geq 0, \forall t, x \in [a, b]$$

出发, 先固定住 x 对 t 积分, 将所得结果再对 x 积分.

7.17 设 $b > a > 0$. 求证: $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$.

提示: 对 $f(x) = -\frac{1}{x}$, 利用上题结果.

第八章 定积分应用

平面图形的面积

8.1.1 求下列曲线所围图形的面积:

- (1) $y = x^2$ 与 $y = x + 5$;
- (2) $y^2 = 2x$ 与 $x = 5$;
- (3) $y^2 = 1 + 2x - x^2$ 与 $x + y = 1$;
- (4) $x^2 + 9y^2 = 1$;
- (5) $y = x$ 与 $y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

8.1.2 求下列用极坐标表示的曲线所围图形的面积:

- (1) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$;
- (2) $r = a \sin 3\varphi$;
- (3) $r = a \cos \theta + b$ ($b \geq a$).

8.1.3 求下列用参数方程表示的曲线所围图形的面积:

- (1) $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$;
- (2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 以及 x 轴;
- (3) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;
- (4) $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

由截平面的面积求体积

8.2.1 求下列曲面所围的体积:

- (1) 椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(2) 正圆台: 其上下底分别为半径为 a 与 b 的圆, 而其间的距离为 h .

(3) 正长方台: 上底的长与宽为 a_1, b_1 , 下底的长与宽为 a_2, b_2 , 而两底的间距为 h .

(4) 抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 所围成的部分.

8.2.2 求下列旋转体的体积:

- (1) 旋转抛物体, 其底面积为 S , 高为 H .

(2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $x = h$ ($|h| < a$), 所围成部分绕 x 轴旋转产生的旋转体.

(3) 双曲线 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 与直线 $x = \pm h$ 所围成的图形绕 x 轴旋转产生的旋转体.

(4) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 绕 x 轴旋转产生的旋转体.

8.2.3 求曲线 $y = \frac{4}{x}$ 与 $y = (x-3)^2$ 所围成图形的面积, 及求此图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

8.2.4 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与两平面 $z = 0$; $z = 2(x+a)$ 所围部分的体积.

8.2.5 求曲面 $z = xy$ 与平面 $z = 0$, $x = a$, $y = b$ 所围部分的体积 ($a > 0$, $b > 0$).

8.2.6 求曲面

$$\frac{xy^2}{a^2} + \frac{x^2z^2}{b^2} = x(1-x^2) \quad (a, b > 0)$$

所围部分的体积.

8.2.7 求下列曲线分别绕 Ox 轴与绕 Oy 轴旋转所成曲面包围的体积:

(1) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$;

(2) $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$, $a, b > 0$.

平面曲线的弧长与曲率

8.3.1 求下列曲线的弧长:

(1) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$;

$$(2) y=e^x, 1 \leq x \leq 2;$$

$$(3) x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq e;$$

$$(4) x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};$$

$$(5) r=a(1+\cos\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, a>0;$$

$$(6) x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), a>0, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

8.3.2 求下列曲线的曲率及曲率半径:

$$(1) y^2=2px, p>0;$$

$$(2) x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t);$$

$$(3) x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t);$$

$$(4) r=a(1+\cos\theta);$$

$$(5) r^2=2a^2\cos 2\theta;$$

8.3.3

(1) 求证: 用极坐标表示的曲线 $r=r(\theta)$ 在 (r, θ) 点的曲率为:

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

(2) 求 $r=ae^{b\theta}$ 的曲率.

8.3.4 设曲线用参数方程 $x=x(t), y=y(t)$ 给出, 求证曲率中心方程为(即渐屈线方程):

$$\xi = x(t) - y'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}; \quad \eta = y(t) + x'(t) \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

8.3.5 求抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的渐屈线方程.

8.3.6

(1) 求 $y=\ln x$ 与 x 轴交点处的曲率圆方程;

(2) 求 $y = \ln x$ 的最大曲率.

8.3.7 设曲线 $y = f(x)$ 在一点 (x, y) 处的曲率半径为 ρ , 曲率中心为 (ξ, η) , 且 f 的三阶导数存在. 令 $g = (1 + y'^2)/y''$. 求证:

$$(1) \frac{d\xi}{dx} = -y'^2 - y'g';$$

$$(2) \frac{d\eta}{dx} = y' + g';$$

$$(3) \frac{d\rho}{dx} = y' \sqrt{1 + y'^2} + g' \sqrt{1 + y'^2};$$

$$(4) \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2, \text{ 并说明此等式的几何意义.}$$

8.3.8 设 $y = f(x)$ 与 x 轴在原点处一阶密切并在原点处二阶导数存在. 求证: 曲线 $y = f(x)$ 在原点处的曲率半径为:

$$\rho = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2y}.$$

旋转体侧面积

8.4.1 求下列曲线旋转体的表面积:

$$(1) r = a(1 + \cos \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ 绕极轴旋转.}$$

$$(2) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ 绕直线 } y = 2a \text{ 旋转.}$$

$$(3) x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转.}$$

$$(4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b, \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转.}$$

8.4.2 求证: 球带的面积等于球的最大圆周长与球带高的乘积.

物理应用

8.6.1 求下列曲线的质量(设密度为 1)与重心坐标.

$$(1) y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1;$$

$$(2) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0;$$

$$(3) x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}.$$

8.6.2

(1) 求半圆 $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ 的重心;

(2) 求半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($|x| \leq R$) 的重心,

8.6.3

(1) 求半球 $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的重心;

(2) 求半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ($x^2 + y^2 \leq R^2$) 的重心.

8.6.4 求半圆 $0 < h \leq y \leq h + \sqrt{R^2 - x^2}$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积与侧面积.

8.6.5 求锥体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ 的重心和绕 z 轴的转动惯量.

8.6.6 求抛物体 $x^2 + y^2 \leq z \leq h$ 的重心和绕 z 轴的转动惯量.

8.6.7 证明: 把面积 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\theta)$, 绕极轴旋转所成的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta d\theta.$$

提示: 对微元应用古鲁金定理.

8.6.8 应用重心公式计算定积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

8.6.9 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 利用重心公式证明:

$$\int_a^b x f(x) dx \leq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

注: 参看 7.5.12 题与 7.16 题.

8.6.10 问能否存在曲边梯形 $\{(x, y) | 0 < a \leq x \leq b, 0 \leq y$

$\leq f(x)$ }, 使它的重心 $\bar{x}$ 与绕 y 轴的转动惯量满足等式:

$$\int_a^b x^2 f(x) dx = \bar{x}^2 \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

8.6.11 有一半半径 $R=3$ 米的圆形溢水洞, 水半满, 求作用在闸门上的压力.

8.6.12 有一薄板 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$), 长轴沿铅直方向一半浸入水中, 求水对板的压力.

8.6.13 弹簧所受压缩的力与缩短距离 x 之间满足虎克定律 $F=kx$ (k 为比例常数), 现有一弹簧由原长压缩 6 厘米, 问需作多少功?

8.6.14 质量为 m 的物体, 以初速 v_0 发射使其脱离地球, 求证:

(1) 物体脱离地球时 (即引力自 R 到 R' 作功, 再令 $R' \rightarrow +\infty$) 所作的功为

$$W = G \frac{mM}{R},$$

其中 M, R 分别为地球的质量及半径, G 是引力常数;

(2) $v_0 = \sqrt{2gR}$;

(3) 若 $R=6370$ 公里, $g=9.8$ 米/秒², 求 v_0 (即第二宇宙速度).

8.6.15 油类通过油管时, 中间流速大, 越靠近管壁, 流速越小. 实验确定, 流速 v 和该处到管中心的距离 r 有关系式:

$$v = k(a^2 - r^2),$$

其中 k 为比例常数, a 为油管半径. 求通过油管的流量. (流量 $Q = \text{流速 } v \times \text{截面积 } S$).

8.6.16 有一根长 l 的细杆, 均匀带电, 总电量为 Q .

(1) 距杆一端 a 处有一单位正电荷, 求其所受的力.

(2) 距杆中心为 a 处有一单位正电荷, 求其所受的力.

8.6.17 根据托里拆利定律, 液体从距自由面深度为 h 厘米的孔流出, 它的速度 $v = c\sqrt{2gh}$ 厘米/秒, 式中 g 是重力加速度, c 是流出系数 ($c = 0.6$). 现有一圆柱形贮油罐, 直径 20 米, 高 20 米, 装满汽油. 出口管子直径 10 厘米, 问全部汽油流完, 需要多少时间.

8.6.18 把一密度均匀的抛物形体: $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ 放置在水平的桌面上. 求证: 抛物体的轴线与桌面的夹角为

$$\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

提示: 求重心高度的最小值.

8.6.19 半径为 1 的球正好有一半沉入水中, 球的比重为 1. 现将球从水中取出, 要作多少功?

* * *

8.1 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 求证:

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 + \left(\int_a^b g(x) dx \right)^2 \\ & \leq \left(\int_a^b \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} dx \right)^2. \end{aligned}$$

8.2 已知抛物线 $x^2 = (p-4)y + a^2$ ($p \neq 4, a > 0$). 求 p 和 a 的值使得满足:

(1) 抛物线与 $y = x + 1$ 相切;

(2) 抛物线与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转有最大的体积.

第九章 实数空间

实数与极限

9.2.1 求证: $\forall$ 自然数 $n, \sqrt{n(n+1)}$ 不能是整数.

9.2.2 求证: $\forall$ 自然数 n , $\sqrt{n(n+2)}$ 是无理数.

9.2.3 设 m, n 为奇整数. 求证: $x^2 + 2mx + 2n = 0$ 没有有理数根.

9.2.4 求证: $\cos 10^\circ$ 为无理数.

9.2.5 求证: $\log_{10} 2$ 为无理数.

9.2.6 设

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty).$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

9.2.7 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ (a 为有限或无限). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

9.2.8 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

9.2.9 设序列 $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow +\infty$) 且 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$). 求证: 调和平均序列

$$y_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty).$$

9.2.10 设 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

9.2.11 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足如下条件:

(1) $\{y_n\}$ 严格递增;

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a.$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

9.2.12 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

9.2.13 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\frac{2}{3}n^{3/2}} = 1.$$

$$9.2.14 \text{ 设 } a_n > 0, b_n > 0, A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k, \text{ 且 } a_n \sim b_n.$$

求证: 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$, 则 $A_n \sim B_n$.

确界与区间套

9.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$ 且 $f(x) > 0$ ($\xi < x \leq b$).

9.3.2 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 其最大值和最小值分别为 M 和 m ($m < M$). 求证: 必存在区间 $[\alpha, \beta]$, 满足条件:

$$(1) f(\alpha) = M, f(\beta) = m \text{ 或 } f(\alpha) = m, f(\beta) = M;$$

$$(2) m < f(x) < M, \text{ 当 } x \in (\alpha, \beta).$$

9.3.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 $[a, b)$ 上右导数存在. 求证:

$$(1) \text{ 若 } f(b) > f(a), \text{ 则 } \exists \xi \in [a, b), \text{ 使得}$$

$$f'_+(\xi) \geq \frac{f(b) - f(a)}{2(b-a)};$$

(2) 若 $f(b) < f(a)$, 则 $\exists \xi \in [a, b)$, 使得

$$f'_+(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{2(b-a)}.$$

提示: 考虑辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{2(b-a)}(x-a).$$

9.3.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $[a, b)$ 上右导数存在. 求证:

- (1) 若 $f'_+(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 递增;
- (2) 若 $f'_+(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 递减;
- (3) 若 $f'_+(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 为一常数.

9.3.5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 但不为常数. 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(x)$ 在 ξ 点不取极值.

9.3.6 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上不为常数. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 及 $k > 0$, 使得 $\forall \delta > 0$, 在 $(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap (a, b)$ 上总存在两点 x', x'' , 使得

$$\left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right| \geq k.$$

9.3.7 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且有界; 对于 $\forall a \in (-\infty, +\infty)$, $f(x) = a$ 在 $[0, +\infty)$ 上只有有限个根或无根. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 存在.}$$

9.3.8 设 $f(x) \in R[a, b]$. 求证:

- (1) 存在区间序列 $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, 使

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset (a_n, b_n) \subset (a, b),$$

且 $\omega_f([a_n, b_n]) < \frac{1}{n}$;

(2) $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$, 使得 $f(x)$ 在 c 点连续;

(3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有无穷多个连续点.

9.3.9 设有按大小排列的 m 个点:

$$a_1^{(1)} \leq a_2^{(1)} \leq \cdots \leq a_m^{(1)},$$

用 $\frac{a_1^{(1)} + a_m^{(1)}}{2}$ 代替 $a_1^{(1)}$ 和 $a_m^{(1)}$, 然后再按大小排列, 得

$$a_1^{(2)} \leq a_2^{(2)} \leq \cdots \leq a_m^{(2)},$$

再用 $\frac{a_1^{(2)} + a_m^{(2)}}{2}$ 代替 $a_1^{(2)}$ 和 $a_m^{(2)}$, 然后按大小排列, 得

$$a_1^{(3)} \leq a_2^{(3)} \leq \cdots \leq a_m^{(3)},$$

依此下去, 我们得 m 个点列 $\{a_1^{(n)}\}, \cdots, \{a_m^{(n)}\}$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_j^{(n)} = \frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots + a_m^{(1)}}{m} \quad (j=1, \cdots, m).$$

紧性定理

9.4.1 求证: 序列 $\{a_n\}$ 有界的充要条件是: $\{a_n\}$ 的任何子序列 $\{a_{n_k}\}$, 都有收敛的子序列.

9.4.2 假设序列 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 都存在以 a 为极限的子序列. 求证: 序列 $\{a_n\}$ 也以 a 为极限.

9.4.3 设 $\{a_n\}$ 为有界序列, 且任一收敛的子序列都有相同的极限值 a . 求证: $\{a_n\}$ 也以 a 为极限.

9.4.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界. 求证: $\exists c \in [a, b]$, 对 $\forall \delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ 上无界.

9.4.5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, 且在每一点处函数的极限存在. 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

9.4.6 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的凸函数, 且有上界. 求证:

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 存在.

9.4.7 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有第一类间断点, 定义

$$\omega(x) = |f(x+0) - f(x-0)|.$$

求证: $\forall \varepsilon > 0, \omega(x) \geq \varepsilon$ 的点 x 只有有限多个.

完备性定理

9.5.1 求证序列 $\{\operatorname{tg} n\} (n \rightarrow +\infty)$ 的极限不存在.

9.5.2 (1) 求证序列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} (n \rightarrow +\infty)$ 的极限不存在;

(2) 指出下面推理中的错误:

$\forall \varepsilon > 0, \forall$ 自然数 p , 因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调下降趋于 0, 所以 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{p}$, 于是:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+p}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{p}{\sqrt{n}} < p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon.$$

由收敛原理, 知序列 $\{x_n\}$ 收敛.

9.5.3 设 $x_n = \int_1^n \frac{\sin x}{x} dx$. 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

9.5.4 求证: $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续的充要条件为 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 存在.

9.5.5 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) \text{ 与 } \lim_{x \rightarrow b-0} f'(x) \text{ 存在.}$$

(1) 求证:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 与 } \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) \text{ 存在;}$$

(2) 求证: 可以对 $f(x)$ 在 a, b 点补充定义后, 使得 $f'(a),$

$f'(b)$ 存在.

9.5.6 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $|g'(x)| < f'(x)$.
求证: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 存在.

9.5.7 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, $|f'(x)|$ 单调下降, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0.$$

连续函数的性质

9.6.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并且有唯一的极大点 x_0 ; 又设 $x_n \in [a, b]$, 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0.$$

9.6.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续、可微; 又设

$$(1) \min_{a \leq x \leq b} f(x) < p < \max_{a \leq x \leq b} f(x);$$

$$(2) \text{ 如果 } f(x) = p, \text{ 则有 } f'(x) \neq 0.$$

求证: $f(x) = p$ 的根只有有限多个.

9.6.3 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且无极大点, 又 $x_n \in (a, b)$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf_{a < x < b} f(x).$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

9.6.4 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且无极大点. 求证: $f(x)$ 只存在两种情况:

(1) $f(x)$ 在 (a, b) 上单调;

(2) $\exists x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x)$ 在 (a, x_0) 上下降, 在 (x_0, b) 上上升, 且 x_0 为 $f(x)$ 的最小值.

9.6.5 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的连续函数, 它仅有有限个极值点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 那末 $f(x)$ 是波浪形的 (即 $f(x)$ 分别在 (a, x_1) , (x_1, x_2) , $\cdots$, (x_{n-1}, x_n) , (x_n, b) 上单调, 且单调递增与单调递减是相间的).

9.6.6 设 $f(x) \in C[0, 2a]$ 而且 $f(0) = f(2a)$. 求证: $\exists x \in [0, a]$ 使得 $f(x) = f(x+a)$.

9.6.7 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且取值为整数. 求证: $f(x) \equiv$ 常数.

9.6.8 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, $\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点上半连续; 若在每一点上半连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是上半连续的. 求证: $[a, b]$ 上的上半连续函数 $f(x)$ 必达到它的上确界.

压缩映象原理

9.7.1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $|f'(x)| \leq k < 1$, $\forall x_0$, 令

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

求证:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在;

(2) 上述极限为 $x=f(x)$ 的根, 且是唯一的.

9.7.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 单调上升, 且 $a < f(x) < b, \forall x \in [a, b]$. 求证: 任取 $x_0 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = f(x_n) (n=0, 1, 2, \cdots)$, 则有 $\{x_n\}$ 收敛并且其极限是

$$x = f(x)$$

的根.

9.7.3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调下降, 且满足条件:

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad x \neq y.$$

求证: 任给初值 x_0 , 令 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 则有 $\{x_n\}$ 收敛并且其极限是

$$x = f(x)$$

的根.

9.7.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足条件:

(1) $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad 0 < k < 1;$

(2) $f(x)$ 的值域包含在 $[a, b]$ 内, $\forall x_0 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$). 求证:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在;

(2) 方程

$$x = f(x)$$

的解在 $[a, b]$ 上是唯一的, 这个解就是上述极限值.

9.7.5 设方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

(1) 求证: 方程在 $[\sqrt{2}, 1.5]$ 上有一个且只有一个根;

(2) $\forall x_0 \in [\sqrt{2}, 1.5]$, 由所设方程的一种等价形式 $x^3 = 1 + x^2$, 想到采用迭代形式:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛到方程的根;

(3) $\forall x_0 \in [\sqrt{2}, 1.5]$, 由所设方程的另一种等价形式 $x = 1 + \frac{1}{x^2}$, 想到采用迭代形式:

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛到方程的根;

(4) 设初值都从 $x_0 = 1.5$ 出发, 问(2), (3)两种迭代过程哪个收敛得快? (收敛快慢的标准用 $\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|}$ 的大小来衡量, 其中 ξ 表示方程的根.)

上极限与下极限

9.8.1 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 和 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

(1) $S_n = (-1)^n$;

(2) $S_n = \frac{n+1}{n} [1 + (-1)^n]$;

(3) $S_n = \sin \frac{n\pi}{2} + n \cos \frac{n\pi}{2}$.

9.8.2 求 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

(1) $f(x) = x \sin x \sin \frac{1}{x}$; (2) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cos x}$.

9.8.3 设 $x_n > 0$ 并且

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

9.8.4 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 求证:

(1) $1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq 2$;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求出极限值.

9.8.5 设数列 F_n 用如下递推方式定义:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

9.8.6 设两序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足关系式:

$$a_n = b_n - qa_{n+1} \quad (0 < q < 1).$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 存在的充要条件为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在.

9.8.7 设 $b_n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^{-1}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 求证:

$$(1) \quad b_n = \frac{n+1}{2n} b_{n-1} + 1;$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2.$$

9.8.8 设序列 $\{a_n\}$ 有界, 并满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{2n} + 2a_n) = 0.$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

9.8.9 设序列 $\{v_n\}$ 有界, 并满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n + \frac{1}{2} v_{2n} \right) = 1.$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{2}{3}$.

9.8.10 设序列 $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 并满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n + u_{2n}) = 1.$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ 存在, 并求其值.

9.8.11 设 $y_n > 0$. 求证:

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n = b \text{ 的充要条件为 } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n^2 = b^2;$$

$$(2) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \text{ 的充要条件为 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n^2 = a^2.$$

9.8.12 设序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足:

$$y_n = \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n-1} + \cdots + \sqrt{x_1}}} = \sqrt{x_n + y_{n-1}}$$

$$(n=1, 2, \cdots),$$

其中 $x_n > 0, y_0 = 0$. 求证:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在的充要条件为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 存在.

9.8.13 求证: $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{S_n} \leq 1 (S_n \geq 0)$ 的充要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{l^n} = 0,$$

其中 l 为任一大于 1 的数.

9.8.14 设 $0 \leq x_{n+m} \leq x_n \cdot x_m$ (n, m 为正整数). 求证序列 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 极限存在.

9.8.15 设 $f(x) \in C(a, +\infty)$ 且

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B, \quad B < \eta < A.$$

求证: $\exists x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \eta$.

9.8.16 设函数在 $[a, +\infty)$ 上连续并且有界. 求证: 对任给的实数 $T > 0, \exists x_n \rightarrow +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

9.8.17 设正数序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \quad n=2, 3, 4, \cdots$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

*

*

*

9.1 设 $f(x) \in C[a, b]$. 求证:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

9.2 设 $0 < x_0 < 1, x_{n+1} = x_n - x_n^2$. 求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$.

提示: 考虑 $(nx_n)^{-1}$ 的极限.

9.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义, 且满足条件: $\forall x, y \in [a, b]$,
 $|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad (x \neq y)$;

还假定

$$a \leq \min_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq b;$$

任给初值 $x_0 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$. 求证:

(1) $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \xi$ 并且此 ξ 是唯一的;

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \xi$.

9.4 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且

$$0 \leq f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty).$$

求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \inf_{x > 0} \frac{f(x)}{x}.$$

9.5 设 $\{a_n\}$ 对任意的正整数 $n, m \geq 1$, 有

$$a_m + a_n - 1 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n + 1$$

成立. 求证:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$ 存在;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = q$, 则 $nq - 1 \leq a_n \leq nq + 1$.

9.6 设序列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$,

令 $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, L = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}$. 求证: $\forall \xi \in [l, L], \exists \{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \xi.$$

9.7 (1) 设 $0 < q < 1$. 求证: $\exists r \in (q, 1)$ 使 n 充分大时满足

$$1 + \frac{q}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \quad (n > N).$$

(2) 设 $a_n > 0$, 求证:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \geq 1.$$

9.8 设 $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$. 求证:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty; \quad (2) S_n \sim 2\sqrt{n} \quad n \rightarrow +\infty.$$

9.9 设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n}) = 0.$$

9.10 设 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), $0 < q < 1$, $0 < x_1 < \frac{1}{q}$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \frac{1}{q}.$$

9.11 设 $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} x_n = \sqrt{3}.$$

9.12 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 递增, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^p} = 1.$$

(1) 求证: 当 $h > 0$ 时,

$$f(x) - f(x-h) \leq hf'(x) \leq f(x+h) - f(x);$$

(2) 取 $h = \delta x$ ($0 < \delta < 1$), 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{px^{p-1}} = 1.$$

9.13 (1) 设 q 为正无理数, n 为任一自然数, 可分解

$$n = m_n q + r_n,$$

其中 m_n 为自然数或零, $0 < r_n < q$. 求证: 存在自然数子列 n_k , 使得

$$n_k = \overline{m_k q} + \overline{r_k},$$

其中 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \overline{r_k} = 0$.

(2) 求证: 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上每一点是复数列 $\{e^{in}\}$ 的聚点;

(3) 求证: $[-1, 1]$ 的每一点是数列 $\{\sin n\}$ 的聚点.

提示: r_n 为有界序列, 但 $\overline{r_k}$ 不要求大于零.

9.14 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) < f(b)$, 函数在区间内每一点对称导数 (参看 4.1.6 题) 存在, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\text{对称导数 } f'(\xi) > 0.$$

提示: 设 $f(a) < 0 < f(b)$. 然后考虑函数的零点.

第十章 广义积分

无穷积分的概念

10.1.1 求无穷积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^3};$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)};$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(1+x)^2};$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos ax dx;$$

$$(6) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin ax dx;$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx;$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$(9) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx;$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}};$$

$$(11) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}};$$

$$(12) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^n)^{1/n}\sqrt{1+x^n}};$$

10.1.2 求无穷积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \quad (a>0).$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (n \text{ 为自然数}, ac-b^2>0).$$

10.1.3 设 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $a \leq x < +\infty$, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

收敛, 求证: $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ 收敛.

10.1.4 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降, 且积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0.$$

10.1.5 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 又

$f'(x)$ 在 $x \geq a$ 上存在, 求证:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛的充要条件为

$$\int_a^{+\infty} x f'(x) dx$$

收敛.

10.1.6 求证:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} < \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < 1 + \frac{1}{2e}.$$

10.1.7 若 $f(x)$ 为周期函数, 又 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 求证:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

无穷积分收敛性判别法

10.2.1 判别下列无穷积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}};$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx \quad p \geq 0; \quad (4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx;$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \quad (n \text{ 自然数});$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx; \quad (7) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx \quad (p, q > 0);$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx; \quad (9) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\cos x|};$$

$$(10) \int_1^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] dx;$$

$$(11) \int_1^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}\right) dx;$$

$$(12) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-1} dx;$$

$$(13) \int_0^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx, \text{ 其中 } P_n(x) \text{ 与 } Q_m(x) \text{ 分别为 } n \text{ 次及 } m \text{ 次}$$

多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.

10.2.2 讨论下列无穷积分的收敛及绝对收敛,

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad p > 0.$$

10.2.3 设 $f(x)$ 单调下降趋于零, $f'(x) \in C[0, +\infty)$. 求证:

$$\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx \text{ 收敛.}$$

10.2.4 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 条件收敛.

求证:

$$\int_0^{+\infty} \max(f(x), 0) dx, \int_0^{+\infty} \min(f(x), 0) dx$$

发散.

10.2.5 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 收敛. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

10.2.6 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降, 且 $f(x) \geq 0 (x \geq a)$,

又设 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛. 求证:

$$(1) \int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx \text{ 收敛};$$

(2) 存在 $\xi: a \leq \xi \leq +\infty$, 使得

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx.$$

瑕积分的概念

10.3.1 求下列瑕积分:

$$(1) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}};$$

$$(2) \int_0^a x \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx;$$

$$(3) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln \sin x dx;$$

$$(5) \int_0^1 x^n \ln^n x dx; \quad (6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\lg x} dx;$$

$$(7) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$(8) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

10.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $0 < x \leq 1$ 内是单调函数, 且在点 $x=0$ 邻域内是无界的. 求证: 若

$$\int_0^1 f(x) dx$$

收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

10.3.3 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

10.3.4 设 $f(x) \in C[a, b)$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$, $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 又 $g(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, 且 g 在 $[a, b]$ 上黎曼可积. 求证:

$$(1) \int_a^b f(x) g(x) dx \text{ 收敛};$$

$$(2) \text{ 若 } \int_a^b g(x) dx = 0, \text{ 则 } \int_a^b f(x) g(x) dx = 0;$$

(3) 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

10.3.5 求证:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}.$$

瑕积分收敛性判别法

10.4.1 判别下列瑕积分的收敛性:

- | | |
|--|--|
| (1) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x};$ | (2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx;$ |
| (3) $\int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx;$ | (4) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}};$ |
| (5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x};$ | (6) $\int_0^1 x^a \ln x dx;$ |
| (7) $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^m} dx;$ | (8) $\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{\ln x} dx.$ |

10.4.2 判别收敛性:

- | | |
|---|---|
| (1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}};$ | (2) $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1} dx;$ |
| (3) $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx;$ | (4) $\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^q}{x^p} dx;$ |
| (5) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx;$ | (6) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q};$ |
| (7) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x};$ | (8) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{x^n + x^p}.$ |

10.4.3 讨论下列积分的收敛性与绝对收敛性:

- | | |
|---|---|
| (1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{1+x^q} dx;$ | (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{x^q} dx;$ |
| (3) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx;$ | (4) $\int_1^{+\infty} (\ln x)^p \frac{\sin x}{x} dx.$ |

10.4.4 判别收敛性:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (1) $\int_0^{+\infty} \sin x^p dx;$ | (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx;$ |
|-------------------------------------|---|

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^p} dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x^p} dx; \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{x^p} dx.$$

10.4.5 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $\int_a^b f^2(x) dx$ 收敛. 求证:

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ 收敛.}$$

*

*

*

10.1 求证:

$$\max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |\ln |s-t|| dt = 1 + \ln 2.$$

10.2 求证:

$$\int_1^{+\infty} \left\{ \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right\} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

10.3 设 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 单调下降地趋于 0. 求证:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \quad \text{与} \quad \int_0^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$$

同时收敛,

10.4 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $xf(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调下降. 求证:

$$(1) \quad xf(x) \geq 0 \quad (x \geq a);$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \cdot \ln x = 0.$$

10.5 如果对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{x-p}^{x+p} f(t) dt = \varphi(x),$$

求证:

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)).$$

10.6 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数, 且

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{(1-x)^{1-\alpha}} \quad (0 < x \leq 1).$$

求证: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足条件:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{M}{\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha.$$

10.7 设 $\varphi(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$, 记

$$\psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t^{1+\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

求证: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\psi(x) \sim \frac{c}{x^\alpha}$, 并定出 c 值.

10.8 设 $\varphi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = 0.$$

10.9 设 $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t} \right] \right) dt$. 求证: $F'(0) = \frac{1}{2}$.

提示: 利用上题.

10.10 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$

存在. 求证:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a} \quad (b > a > 0).$$

提示: 利用收敛定义及中值定理.

10.11 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

提示: 利用收敛原理.

10.12 设 $\rho(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(\xi-x)^2 + y^2}$, ξ, x 为任意实数, y 为正实数. 求证:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi-x|^{\frac{1}{2}} \rho(\xi) d\xi = \sqrt{2y}.$$

10.13 设 $x, y > 0, x \neq y$. 求证:

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} < \frac{x+y}{2}.$$

提示:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{[t + \frac{1}{2}(x+y)]^2} < \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)(t+y)} < \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+\sqrt{xy})^2}.$$

第十一章 数值级数

数值级数的基本概念与性质

11.1.1 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}; \quad (2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)};$$

$$(3) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; \quad (4) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+2)};$$

$$(5) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})};$$

$$(6) \sum_{k=1}^{+\infty} \arctg \frac{1}{2k^2}.$$

11.1.2 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right\},$$

其中 $m \geq 1$ 为固定的自然数.

11.1.3 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 各项是正的, 而把级数的项经过

组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数也收敛.

11.1.4 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = a \neq 0$, 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

11.1.5 求证: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

但反过来不成立, 请举出例子.

11.1.6 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$(3) r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta + \cdots + r^n \sin n\theta + \cdots, \quad |r| < 1;$$

$$(4) \frac{1}{2} + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \cdots + r^n \cos n\theta + \cdots, \quad |r| < 1.$$

11.1.7 研究级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的收敛性.

11.1.8 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}.$$

正项级数

11.2.1 判断级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

11.2.2 判断下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \ln n}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n-1}{2}}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! 2^n}{n^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! 3^n}{n^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}};$$

$$(7) \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$$

11.2.3 用哥西判别法证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n - (-1)^n}$$

收敛, 并说明达朗贝尔判别法对此级数失效.

11.2.4 设 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

并问反之是否成立?

11.2.5 设 $a_n > 0$, 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 (n=1, 2, \dots)$. 求证: 用

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ 近似代替 } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 的误差小于 } \frac{r a_n}{1-r}.$$

11.2.6 用积分判别法判别下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{\sqrt{n}}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}.$$

11.2.7 利用泰勒级数估计无穷小量 a_n 的阶, 从而判别下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sin \frac{1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1};$$

$$(5) \sum_{n=3}^{+\infty} \ln^p \cos \frac{\pi}{n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n^2+n+b});$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$$

11.2.8 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 发散, 而 S_n 表示级数的第 n 部

分和. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

提示: 用收敛原理.

11.2.9 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $a_{n+1} \leq a_n$ ($n=1, 2, \dots$). 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a_n = 0.$$

11.2.10 设

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n^2}, & n \neq k^2, k = 1, 2, \dots \\ a_{k^2} = \frac{1}{k^2}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

求证:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$$

11.2.11 设 $0 < P_1 < P_2 < \dots < P_n < \dots$, 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{P_n}$ 收敛的

充要条件为级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$$

收敛.

11.2.12 利用拉阿伯判别法研究下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \quad (p \text{ 实数});$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} \frac{1}{n^\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

11.2.13 设 $a_n > 0$. 求证:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \geq 1.$$

11.2.14 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都发散, 问下列级数

的收敛性如何?

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n); \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \max(a_n, b_n).$$

11.2.15 设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n} = 0,$$

并由此推证 11.2.9 题.

任意项级数

11.3.1 不用哥西准则, 求证: 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛.

11.3.2 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, 问是否能断定 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛? 研究例子:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n = a_n + \frac{1}{n}.$$

11.3.3 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(A)$ 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(B)$ 皆收敛, 且

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(C)$ 也收敛; 若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性如何?

11.3.4 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 满足条件:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) \text{ 收敛.}$$

求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

11.3.5 求证: 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

11.3.6 下列是非题, 是的请给予证明, 错的请举出反例:

(1) 若 $a_n > 0$, 则 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$ 收敛;

(2) 若 $a_n \rightarrow 0$, 则 $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$ 收敛;

(3) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 收敛;

(4) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^3$ 绝对收敛;

(5) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则 $a_n \rightarrow 0$.

(6) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $b_n \rightarrow 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛;

(7) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛, $b_n \rightarrow 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛;

(8) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

(9) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a_n = 0$.

11.3.7 判别下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1});$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{3^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad (p > 0);$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n}{n};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n};$$

$$(11) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots \\ + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots.$$

11.3.8 设 $b_n > 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) > 0.$$

求证: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$ 收敛.

11.3.9 利用上一题讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p;$$

$$(2) \quad 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

11.3.10 设 $p > 0$. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

提示: 函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 是凸函数 ($x > 0$).

11.3.11 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}; \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{a}{1+a^n} \quad (a > 0);$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}; \quad (4) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}.$$

11.3.12 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$. 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$$

收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

11.3.13 对序列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 定义 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k$. 求证:

(1) 如果 S_n 有界, $\sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta b_k|$ 收敛, 且 $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), 则

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ 收敛, 且有

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k = - \sum_{k=1}^{+\infty} S_k \Delta b_k;$$

(2) 如果 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta b_k|$ 都收敛, 则

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot b_k$$

收敛.

11.3.14 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调上升且有界. 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

收敛.

11.3.15 用泰勒公式讨论下列级数的收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n-1})^p}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right);$$

$$(3) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n}{4} \pi}{n^p + \sin \frac{n}{4} \pi}.$$

11.3.16 研究下列级数的收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad (p > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + \frac{1}{n}} \quad (p > 0);$$

$$(3) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} \quad (p > 0); \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p} \quad (p > 0);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0;$$

$$(7) 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (x > 0);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n r^{n+\sqrt{n}} \quad (r > 0);$$

$$(10) \sum_{n=1}^{+\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

收敛级数的性质

11.4.1 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 求证: 将相邻奇偶项交换后所成的

级数收敛, 且具有相同的和数.

11.4.2 求证: 若将收敛级数的各项重新排列, 而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则其和不变.

11.4.3 求证:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的项经过组合而不变更其

先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1=1 < p_2 < \dots)$$

也收敛, 且有相同的和, 并问反之是否成立, 即由 $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ 收敛, 是否

能推出 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 A_n 中各项 a_i 同号, 且 A_n 与 A_{n+1} 异号, 则从 $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ 收

敛可以推出 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

11.4.4 设 $p_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ 收敛. 求证:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$ 收敛; (参看 11.2.11 题)

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$.

11.4.5 求证: 由级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 的项组合成的级数

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

发散.

11.4.6 已知 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = c + \ln n + r_n$, c 为欧拉常数, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$. 求证:

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} r_m;$$

(2) 若把级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

的各项重新安排, 而使挨次 p 个正项的一组与挨次 q 个负项的一组相交替, 则新级数的和为:

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

11.4.7 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

的平方(哥西乘积)是收敛的.

11.4.8 设 $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 并且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = b$. 求证:

$b \leq 1$.

提示: 考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$.

11.4.9 通过序列转化为级数的方法, 求证下面两个序列收敛:

$$(1) \quad x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n};$$

$$(2) \quad x_n = \sum_{k=1}^{+n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

11.4.10 求级数

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^3, \quad |x| < 1$$

的和.

11.4.11 令 $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. 求证:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

*

*

*

11.1 设 m 为自然数. 求证:

$$(1) \frac{1}{m} = C_m^1 - C_m^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + C_m^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right);$$

$$(2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m!m}.$$

11.2 设 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^m}{n!} = ep_m$. 求证:

$$(1) p_{m+1} = 1 + mp_1 + \frac{m(m-1)}{2!}p_2 + \cdots + p_m;$$

(2) p_m 都是正整数.

11.3 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$. 求证:

$$(1) \text{当 } l > 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a_n}} \text{ 收敛};$$

$$(2) \text{当 } l < 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a_n}} \text{ 发散};$$

并问 $l=1$ 时会有什么结论?

11.4 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (a_n > 0)$ 发散, 且 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$$

当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散.

11.5 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (a_n > 0)$ 收敛, 且 $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$$

当 $p < 1$ 时收敛; 当 $p \geq 1$ 时发散.

提示: 设 $s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 在 $[0, s]$ 上考虑瑕积分.

11.6 设 $p > 1$. 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n^{1/p}} < p.$$

提示:

$$\frac{1}{(n+1)n^{1/p}} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{n}{n^{1/p}}.$$

11.7 设 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^p$$

的收敛性

提示: 考虑 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right)$.

11.8 设 $x_{n+1} = x_n(1 - qx_n)$, $0 < q < 1$, $0 < x_1 < \frac{1}{q}$. 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$$

是否收敛?

11.9 设 $p_n > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ 收敛. 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2} p_n$$

收敛.

11.10 设 b_n 单调下降, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. 令

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k. \text{ 求证:}$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \cdot b_n = 0;$$

$$(2) \text{ 级数 } \sum_{n=1}^{+\infty} S_n (b_n - b_{n+1}) \text{ 收敛, 且}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n (b_n - b_{n+1}).$$

$$\text{提示: } a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = a_m \cdot b_m \cdot \frac{1}{b_m} + \cdots + a_n \cdot b_n \cdot \frac{1}{b_n}.$$

第十二章 函数项级数

函数序列及函数级数的一致收敛性

12.2.1 求出下列函数项级数的收敛区域(绝对的和条件的):

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$$

(讨论 $|a| > 1$ 及 $|a| \leq 1$ 两种情形.)

12.2.2 讨论下列函数序列在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n},$$

$$1) 0 \leq x \leq b (< 1),$$

$$2) 0 \leq x \leq 1,$$

$$3) (1 <) a \leq x < +\infty;$$

$$(2) f_n(x) = \frac{1}{1+nx},$$

$$1) (0 <) a \leq x < +\infty,$$

$$2) 0 < x < +\infty;$$

$$(3) f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^3 x^3},$$

$$1) (0 <) a \leq x < +\infty,$$

$$2) 0 < x < +\infty;$$

$$(4) f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1+e^{-nx}), \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(5) f_n(x) = e^{-(x-n)^2},$$

$$1) -l \leq x \leq l,$$

$$2) -\infty < x < +\infty;$$

$$(6) f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$(7) f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

12.2.3 设 $f(x)$ 定义于 (a, b) , 令

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

求证: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a < x < b).$$

12.2.4 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有连续的导数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

求证: 在闭区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ ($\alpha < \alpha < \beta < b$) 上, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \Rightarrow f'(x).$$

12.2.5 设 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在 $[a, b]$ 上有界, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 求证: $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致有界. (即 $\exists M > 0$, 这个 M 与 n 无关, 使 $|f_n(x)| \leq M$, 对 $\forall x \in [a, b]$, 及 $\forall n = 1, 2, \dots$ 成立.)

12.2.6 设 $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ 都是一致收敛且一致有界的函数序列. 求证: $\{f_n(x) \cdot g_n(x)\}$ 也一致收敛.

12.2.7 设 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ($n=1, 2, \dots$). 求证: $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \Rightarrow 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

12.2.8 设 $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积. 定义函数序列

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

求证: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \Rightarrow 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

一致收敛判别法

12.2.9 证明下列级数在所指定区间内的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x+2^n}, \quad -2 < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad |x| < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \ln^n x}{n!}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

12.2.10 通过一般项判断级数的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad 0 < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad -1 < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

12.2.11 判断下列级数的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} e^x, \quad |x| \leq a;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$(4) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}} \right), \quad |x| < +\infty;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}, \quad |x| < +\infty;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

$$1) 0 \leq x \leq \pi;$$

$$2) 0 < a \leq x \leq \pi.$$

12.2.12 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nx}$$

在 $x \geq 0$ 区域内一致收敛.

12.2.13 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

在 $x \geq 0$ 区域内一致收敛.

12.2.14 若级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对收敛且一致收敛, 问级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上是否一致收敛? 请研究例子

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (1-x) x^n,$$

其中 $0 \leq x \leq 1$.

12.2.15 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

在不包含点 $a_n (n=1, 2, \dots)$ 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

12.2.16 证明: 若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$$

在闭区间 $[a, b]$ 的端点绝对收敛, 则此函数在闭区间 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

一致收敛的函数序列与函数级数的性质

12.3.1 研究下列级数所表示的函数在指定区间上的连续性:

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 \leq x < 1;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad |x| \leq 1; \quad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)},$$

$$0 < x < +\infty.$$

12.3.2 研究下列级数在什么区间上一致收敛, 其和函数在何处连续.

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1+n^4 x^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

12.3.3 设 $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$, $0 \leq x \leq 1$, 求证: 它的任何子序列都不一致收敛.

12.3.4 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n+1})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

12.3.5 问参数 α 取什么值时,

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, n = 1, 2, 3, \dots$$

在闭区间 $[0, 1]$ 收敛? 在闭区间 $[0, 1]$ 一致收敛? 使 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

12.3.6 证明序列 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n = 1, 2, \dots$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

12.3.7 求证 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续并具有连续的二阶导函数.

12.3.8 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛, $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $n = 1, 2, \dots$, 求证:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛};$$

(2) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

12.3.9 设 $f_n(x), n=1, 2, \dots$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 且
 $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (-\infty < x < +\infty), n \rightarrow +\infty.$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

12.3.10 设 $f_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数列, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leq x \leq b);$$

又 $x_n \in [a, b], n=1, 2, \dots, x_0 \in [a, b]$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

12.3.11 设 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

又设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无零点. 求证:

(1) 当 n 充分大时, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也无零点;

$$(2) \frac{1}{f_n(x)} \rightarrow \frac{1}{f(x)} \quad (a \leq x \leq b), n \rightarrow +\infty.$$

12.3.12 设 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{a \leq x \leq b} f_n(x) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

12.3.13 设 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足条件:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y| \quad x, y \in [a, b], n=1, 2, \dots$$

且在 $[a, b]$ 上 $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad n \rightarrow +\infty$. 求证: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

12.3.14 设函数级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛到函数 $S(x)$,

且所有 $u_n(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的非负连续函数. 求证:

(1) $S(x)$ 是下半连续函数, 即 $\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta, x \in [a, b]$ 时

$$S(x) > S(x_0) - \varepsilon.$$

(2) $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上达到最小值.

12.3.15 设 x_n 是 $(0, 1)$ 内一个序列, 即 $0 < x_n < 1$, 且 $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$). 试讨论函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在 $(0, 1)$ 中的连续性.

12.3.16 求证:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln x$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\ln x}{1 + \left| \ln \ln \frac{1}{x} \right|}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并说明不能用控制判别法.

制判别法.

12.3.17 求证: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

在 $x > 1$ 内是连续的, 且有任意阶的连续导数.

12.3.18 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$. 求证:

(1) $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上连续;

(2) $f(x)$ 在 $x > 0$ 内无穷次可微.

12.3.19 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-nx^2}$. 求证:

- (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;
- (2) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导函数;
- (3) $f(x)$ 在 $0 < |x| < +\infty$ 上无穷次可导.

提示: 不要对一般项直接求导.

12.3.20 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无穷多次可微, 且 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛到某个函数 $\varphi(x)$. 求证:

$$\varphi(x) = Ce^x,$$

其中 C 为常数.

* * *

12.1 求证:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} \quad (0 < \alpha < 1).$$

12.2 给定正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\beta_n x}$$

- (1) 收敛域.
- (2) 在收敛域上是否一致收敛, 为什么?
- (3) 求出一致收敛域.

12.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (0 < k < 1),$$

且 $a \leq \min_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \max_{a \leq x \leq b} f(x) \leq b$; 构造序列:

$$f_1(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

求证: 存在常数 C , 使得当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$f_n(x) \rightrightarrows C \quad (a \leq x \leq b).$$

12.4 设对每一个自然数 n , $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 又对 $[a, b]$ 中的每一个 x , 序列 $f_n(x)$ 有界. 求证: 存在 $[a, b]$ 中的一个小区间, 使得 $f_n(x)$ 在此小区间上一致有界.

提示: 用区间套进行反证.

12.5 设 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 且 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

12.6 设 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上连续, $\forall \delta > 0$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a + \delta \leq x \leq b - \delta)$$

且瑕积分存在并满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

12.7 设 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且一致有界, $\forall \delta > 0$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a + \delta \leq x \leq b - \delta).$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

12.8 求证:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \sin \pi x dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

第十三章 幂级数

幂级数的收敛半径与收敛区间

13.1.1 求下列幂级数的收敛半径, 并讨论收敛区间端点的收敛性.

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{\sqrt{n}}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a, b > 0);$$

$$(7) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + 2 \cos \frac{n\pi}{4}\right)^n x^n; \quad (8) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} (x+1)^n;$$

$$(9) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{5^n + 7^n};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n};$$

$$(11) \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n;$$

$$(12) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$(13) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n + (-3)^n}{n} (x+1)^n; \quad (14) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$(15) \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n^2} x^n \quad (0 < a < 1); \quad (16) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n;$$

$$(17) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^n;$$

$$(18) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

13.1.2 设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 且在开区间 $(-R, R)$ 上

一致收敛. 求证: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[-R, R]$ 上一致收敛.

13.1.3 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$. 求

$$F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

的幂级数展开式, 并证明新幂级数的收敛半径不会比 R 大.

13.1.4 给定数列 $\{a_n\}$, 已知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|S_n|} = 1.$$

13.1.5 设 $\left| \sum_{k=0}^n a_k x_1^k \right| \leq M$ ($n=0, 1, \dots$; $x_1 > 0$). 求证: 当 $0 < x < x_1$ 时, 有

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 收敛};$$

$$(2) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq M.$$

13.1.6 设 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, 和函数为 $f(x)$,

若 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 发散, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

13.1.7 两个收敛半径相等的幂级数, 问经过相加和相乘后得到的幂级数的收敛半径如何变化?

幂级数的性质

13.2.1 设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}.$$

(1) 求证: $f(x) \in C[-1, 1]$, $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续;

(2) 求证: $f(x)$ 在 $x = -1$ 点可导;

(3) 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = +\infty;$$

(4) 求证: $f(x)$ 在 $x = 1$ 点不可导.

13.2.2 给定零阶贝塞耳函数:

$$y = J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

求证: 它在实轴上满足方程

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

13.2.3 用逐项微分和逐项积分求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n! 2^n} x^n; \quad (6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n;$$

$$(7) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$(8) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}; \quad (9) \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{k+1}-1) x^k;$$

$$(10) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}; \quad (11) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{n!} x^{2n+1};$$

$$(12) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{2^k}; \quad (13) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

13.2.4 求证:

$$(1) \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(2) \frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \right).$$

13.2.5 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = +\infty$, 令

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

求证: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$f(f_n(x)) \rightrightarrows f(f(x)), \quad (a \leq x \leq b).$$

初等函数的泰勒级数展开

13.3.1 将下列函数展开为麦克劳林级数.

$$(1) \frac{1}{a-x} \quad a \neq 0; \quad (2) \frac{1}{(1+x)^2};$$

- (3) $\frac{1}{(1+x)^3}$; (4) $\frac{x^2}{x^2-3x+1}$;
 (5) $\operatorname{sh} x$; (6) $\operatorname{ch} x$;
 (7) $\cos^2 x$; (8) $\sin^3 x$;
 (9) $\frac{x}{\sqrt{1-3x}}$; (10) $\frac{x}{(1-x)(1-x^3)}$;
 (11) $\ln(1+x+x^2)$; (12) $\arcsin x$.

13.3.2 将下列函数在指定点附近展开为幂级数.

- (1) $\frac{1}{a-x}$, $x=b \neq a$;
 (2) $\frac{x^2}{x^2-3x+1}$, $x=2$; (3) $\frac{1}{1-x-x^2}$, $x=2$;
 (4) $(1+x)e^{-x}$, $x=0$; (5) $\ln \frac{1}{2+2x+x^2}$, $x=-1$;
 (6) $\ln^2(1-x)$, $x=0$; (7) $\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, $x=0$.

13.3.3 设 $x>0$. 求证:

$$\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right].$$

13.3.4 利用基本初等函数展式, 求下列函数的幂级数, 并说明收敛区间:

- (1) $(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$; (2) $\ln(1+x+x^2+x^3)$;
 (3) $\frac{1}{1-3x+2x^2}$; (4) $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

13.3.5 利用逐项求导和逐项积分证明下列函数展式成立:

$$(1) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(|x| \leq 1);$$

$$(2) \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2^n+1)} (|x| \leq \sqrt{2}).$$

13.3.6 利用求幂级数的系数证明下列展式成立:

$$(1) \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \quad (-1 \leq x < 1);$$

$$(2) \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\ (-1 < x \leq 1).$$

13.3.7 求证下列展式成立:

$$(1) (\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad (|x| \leq 1);$$

$$(2) [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1} (|x| \leq 1).$$

13.3.8 利用幂级数相乘求下列函数展开式:

$$(1) \frac{\ln(1+x)}{1+x}; \quad (2) (\operatorname{arctg} x)^2.$$

13.3.9 求证:

(1) 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 区域内如下函数项级数一致收敛于 x :

$$\sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} = x;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

13.3.10 求证:

(1) 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, 如下函数项级数一致收敛于 x^2 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{\sin^{2n+2} x}{n+1} = x^2;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

13.3.11 求证:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta = J_0(x),$$

其中 $J_0(x)$ 为零阶贝塞耳函数:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

13.3.12 设 $|f^{(k)}(x)| \leq M (k=0, 1, \dots, |x| \leq a)$. 求证:

(1) $f(x)$ 可以在 $(-a, a)$ 上展成幂级数;

(2) $f(x)$ 可以开拓到 $(-\infty, +\infty)$, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷次可微.

13.3.13 用待定系数法, 求下列 x 的函数的幂级数展开式:

$$(1) \frac{x \cos \theta - x^2}{1 - 2x \cos \theta + x^2} \quad |x| < 1; \quad (2) \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} \quad |x| < 1.$$

13.3.14 求下列 x 的函数的幂级数展开式:

$$(1) \operatorname{arctg} \frac{x \sin \theta}{1 - x \cos \theta} \quad |x| < 1;$$

$$(2) \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) \quad |x| < 1;$$

13.3.15 利用阿贝尔定理, 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} \quad (0 < \theta < 2\pi);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

13.3.16 求下列定积分:

$$(1) \int_0^{2\pi} \ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta \quad 0 < r < 1 \quad \text{与} \quad r > 1;$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta.$$

斯脱林公式

13.4.1 用斯脱林公式判别级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}.$$

*

*

*

13.1 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{n} x^n$$

的收敛半径,并讨论端点的收敛性.

13.2 求函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [x(1+x)]^{3^n}$$

的收敛域;若把每项展开为 3^n+1 项,从而使级数成为幂级数时,求此幂级数的收敛半径.

13.3 给定数列 $\{a_n\}$, 对应级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}.$$

求证:

(1) 若级数在 x_1 点收敛, 则 $x > x_1$ 时也收敛;

(2) 若级数在 x_2 点发散, 则 $x < x_2$ 时也发散;

(3) 存在 c (c 可以为无穷), 级数当 $x > c$ 时收敛, 当 $x < c$ 时发散, c 称为收敛指标;

(4) 级数在 $x \geq c + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 上一致收敛;

(5) 级数在 $x \geq c + 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 上绝对一致收敛.

13.4 给定数列 $\{a_n\}$, 对应级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nx}.$$

求证:

(1) 若级数在 x_1 点收敛, 则 $x > x_1$ 时也收敛;

(2) 若级数在 x_2 点发散, 则 $x < x_2$ 时也发散;

(3) 存在收敛指标 c , 当 $x > c$ 时级数收敛, 当 $x < c$ 时级数发散 (c 可以为 $+\infty$ 或 $-\infty$);

(4) 当 $x \geq c + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) 时级数绝对一致收敛.

13.5 求证

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x} \begin{cases} \geq (\ln 2)^x & x \geq 1; \\ \leq (\ln 2)^x & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

13.6

(1) 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{(1+x^2 a^{2n})}$ ($a > 1$). 求证: $f(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 上任意次可微;

(2) 设 $g(x), h(x)$ 在实轴上任意次可微, 且

$$g(x) = h(x^2).$$

求证:

$$\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{h^{(n)}(0)}{n!};$$

(3) 求证: (1) 中的函数 $f(x)$ 的泰勒级数, 除 $x=0$ 外处处发散 (即收敛半径为 0).

13.7 设

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = a \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \quad n=2, 3, \dots, |a| < 1;$$

$$x_{n+1} = x_n + c v_n^2 \quad n=1, 2, \dots, c > 0.$$

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

13.8 利用泰勒公式求下面级数的和.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m! m}.$$

第十四章 富里埃级数

基本三角函数系

14.1.1 证明下列函数系 $\{y_n(x)\}$ 在 $[0, l]$ 上正交, (即

$$\int_0^l y_n(x) y_m(x) dx = 0, n \neq m), \text{ 并求 } \int_0^l y_n^2(x) dx.$$

$$(1) y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, n=1, 2, 3, \dots;$$

$$(2) y_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x, n=0, 1, 2, \dots;$$

$$(3) y_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x, n=0, 1, 2, \dots;$$

$$(4) y_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x, n=0, 1, 2, \dots.$$

14.1.2 设 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ 满足

$$\sigma \sin \sqrt{\lambda_n} l + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} l = 0 \quad (\sigma > 0).$$

求证: $\{y_n(x)\} = \{\sin \sqrt{\lambda_n} x\}$ 在 $[0, l]$ 上为正交系, 并求

$$\int_0^l y_n^2(x) dx \quad (\text{用 } \sigma, \lambda_n, l \text{ 表示}).$$

14.1.3 求证: 函数系

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

在 $[-l, l]$ 上是正交的.

周期函数的富里埃级数

14.2.1 求下列周期为 2π 的函数的富里埃级数.

$$(1) \text{ 三角多项式 } P_n(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + b_i \sin ix);$$

$$(2) f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(3) f(x) = e^{ax} \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(4) f(x) = x^3 \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(5) f(x) = \cos \frac{x}{2};$$

$$(6) f(x) = |\sin x| \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} e^{ax} & (-\pi \leq x < 0), \\ 0 & (0 \leq x < \pi); \end{cases}$$

$$(8) f(x) = \cos^3 x;$$

$$(9) f(x) = x \cos x \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(10) f(x) = \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \quad (-\pi \leq x < \pi).$$

14.2.2 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

(1) 若 $f(x+\pi)=f(x)$, 求证:

$$a_{2n+1}=0, \quad a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx dx,$$

$$b_{2n+1}=0, \quad b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx dx;$$

(2) 若 $f(x+\pi)=-f(x)$, 求证:

$$a_{2n}=0, \quad a_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos (2n+1)x dx,$$

$$b_{2n}=0, \quad b_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin (2n+1)x dx;$$

(3) 若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(x)=f(\pi-x)$, 问其富里埃系数有何特点?

14.2.3 将函数

$$f(x)=\sin^4 x$$

展开成富里埃级数.

14.2.4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开下列函数成富里埃级数:

(1) $\operatorname{sgn} x;$ (2) $\operatorname{sgn} \sin 2x;$

(3) $\operatorname{sgn} \cos 2x;$ (4) $|x|.$

14.2.5 在 $(0, 2\pi)$ 中展开下列函数成富里埃级数:

(1) $\frac{\pi-x}{2};$ (2) $\ln \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}}.$

14.2.6 设可积函数 $f(x) \geq 0$ ($-\pi < x < \pi$). 求证:

$$|a_n| \leq a_0, \quad |b_n| \leq a_0.$$

14.2.7 设可积函数 $f(x)$ 为奇函数, 在 $(0, \pi)$ 上满足 $f(x) \geq 0$. 求证:

$$|b_n| \leq n b_1.$$

14.2.8 设 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调递减, 且有界. 求证:

$$b_n \geq 0.$$

14.2.9 设 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上导数 $f'(x)$ 单调上升, 有界, 求证:

$$a_n \geq 0 \quad (n > 0).$$

14.2.10 设 $f(x)$ 有界, 并在 $(-\pi, \pi)$ 上逐段单调. 求证:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty.$$

14.2.11 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 并满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

求证:

$$O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad n \rightarrow +\infty.$$

14.2.12 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的富里埃系数为 $a_n (n=0, 1, 2, \dots)$, $b_n (n=1, 2, \dots)$, 求经过“平移” h 的函数 $f(x+h)$ (h 为常数) 的富里埃系数 $\bar{a}_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 及 $\bar{b}_n (n=1, 2, \dots)$.

富里埃级数的收敛性

14.3.1 问 14.2.1 题中所有函数的富里埃级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛到什么函数?

14.3.2 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成富里埃级数:

(1) 按余弦展开; (2) 按正弦展开;

(3) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开;

(4) 求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

14.3.3 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

(1) 用逐项积分法求 x^2 , x^3 , x^4 在 $(-\pi, \pi)$ 中的富里埃展开式;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

14.3.4 设

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha - |x|, & |x| \leq 2\alpha; \\ 0, & 2\alpha \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$ 的富里埃级数;

(2) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ 的和.

14.3.5

(1) 在 $(-\pi, \pi)$ 内, 求 $f(x) = e^x$ 的富里埃展开式;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ 的和,

14.3.6

(1) 在 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \cos \frac{\alpha}{\pi} x$ 为富里埃级数.

(2) 求证下列展开式:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right);$$

$$\operatorname{tg} x = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi} \right].$$

14.3.7 设 $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ($T_n(x)$ 称

为 n 阶三角多项式). 求证:

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

14.3.8 设 $T_n(x)$ 为 n 阶三角多项式. 求证:

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |T'_n(x)| \leq n^2 \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |T_n(x)|.$$

14.3.9 设

$$D_r(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{\pi r}{2}\right)}{k^r}.$$

求证: $D_r(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上为 r 次代数多项式.

14.3.10 设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 已知其富里埃级数的部分和为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin \frac{t}{2}} dt,$$

作 $S_n(x)$ 的平均值

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$

$$(1) \text{ 证明: } \sum_{m=0}^{n-1} \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}};$$

$$(2) \text{ 证明: } \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt.$$

其中

$$F_n(t) = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2;$$

(3) 证明: $F_n(t)$ 有下列性质:

$$1^\circ F_n(t) \geq 0,$$

$$2^\circ \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1.$$

$$3^\circ \forall \delta > 0,$$

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{当 } n \rightarrow +\infty.$$

14.3.11 设 $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, 且周期为 2π . 求证: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\sigma_n(x) \rightarrow f(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

14.3.12 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 以 2π 为周期, 它的富里埃级数在 x_0 收敛. 求证: $S_n(x_0) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow +\infty)$.

14.3.13 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段连续, 以 2π 为周期,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

(1) 求证:

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

是以 2π 为周期的连续函数且分段可微.

(2) 求 $F(x)$ 的富里埃展开式.

(3) 求证: 对任意区间 $[a, b]$, 都有

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$

任意区间上的富里埃级数

14.4.1 将下列函数在指定区间上展开为富里埃级数.

(1) 在区间 $(0, 2l)$ 展开

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ 0 & l < x < 2l, \end{cases}$$

其中 A 为常数;

$$(2) f(x) = x \cos x, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(3) f(x) = x, (0, l).$$

14.4.2 将周期函数 $f(x) = x - [x]$ 展开成富里埃级数.

14.4.3 在指定区间中求下列函数的富里埃级数, 并指出它的和函数:

$$(1) f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi, \text{ 偶开拓};$$

$$(2) f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, \text{ 奇开拓};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases} \quad \text{奇开拓与偶开拓};$$

$$(4) f(x) = x(\pi - x), 0 < x < \pi, \text{ 奇开拓与偶开拓}.$$

14.4.4 应当如何把给定在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 的可积函数开拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 使得它在 $(-\pi, \pi)$ 中对应的富里埃级数为

$$(1) f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2n-1)x;$$

$$(2) f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2n-1)x.$$

14.4.5 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, 把函数

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

展开为

- (1) 依角的奇数倍的余弦展开;
 (2) 依角的奇数倍的正弦展开.

富里埃级数的平均收敛性

14.5.1 设 $f(x)$ 的富里埃级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 求证:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

14.5.2 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上平方可积. 求证:

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

14.5.3 设 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上平方可积. 求证:

$$\frac{2}{l} \int_0^l f^2(x) dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

* * *

14.1 设 $f(x)$ 是以 $\frac{\pi}{l}$ (l 为正整数) 为周期的周期函数. 求证: 当 $\frac{k}{l}$ 非整数时,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = 0.$$

提示: 利用欧拉公式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

14.2 设 $f(x)$ 的富里埃部分和为

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

定义 $f(x)$ 的费叶尔和为

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

求证:

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

14.3 求证:

(1) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ($0 < x < 2\pi$) 的费叶尔和 $\sigma_n(x)$ 满足

$$|\sigma_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi);$$

$$(2) \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1 \quad (n=1, 2, \cdots, 0 \leq x \leq 2\pi).$$

14.4 设 $f(x)$ 是黎曼可积的周期函数, 周期为 2π , 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\pi - x) dx.$$

14.5 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln(n+1)}$$

不可能是某黎曼可积函数 $f(x)$ 的富里埃级数.

14.6 求证:

$$(1) \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}, \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$(2) \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha-n}, \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} + x^{-\alpha}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

提示: 利用 14.3.6 题.

14.7 计算积分

$$(1) \int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx; \quad (2) \int_0^{\pi} \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi} \ln \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) dx.$$

14.8 设 $f(x)$ 是连续的周期为 2π 的函数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上逐段连续可微, 求证:

$$(1) a_n = -\frac{b'_n}{n}, b_n = \frac{a'_n}{n},$$

其中 $a_n, b_n; a'_n, b'_n$ 分别是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的富里埃系数;

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) \text{ 收敛};$$

(3) $f(x)$ 的富里埃级数绝对收敛且在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)$.

14.9 设 $f(x) \in C^{(3)}[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(0) = f''(\pi) = 0$. 求证: $f(x)$ 按正弦展开的富里埃级数可逐项微分两次, 并且级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n^2$$

收敛.

14.10 设 $T_n(x)$ 是 n 阶三角多项式, $\cos(n-1)x$ 项的系数为 1. 试证明

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |T_n(x)| \geq \frac{\pi}{4}.$$

提示: 利用三角函数系的正交性.

14.11 (1) 证明

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta + T_{n-2}(\theta).$$

$T_{n-2}(\theta)$ 为 $n-2$ 阶三角多项式;

(2) 设 $P_n(x)$ 是 n 次代数多项式; x^{n-1} 项的系数为 1. 令 $T_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$. 说明 $T_n(\theta)$ 为 n 阶三角多项式, 并求出 $\cos(n-1)\theta$ 项的系数;

(3) 设 $P_n(x)$ 同上, 证明

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \geq \frac{\pi}{2^n}.$$

提示: 参看 3.9 题.

第十五章 欧氏空间与多元函数

m 维欧氏空间

15.1.1 设 x_n 是 R^m 中的点列, 若它有极限, 证明 x_n 有界.

15.1.2 设 $x_n, y_n \in R^m$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

15.1.3 设 $l \in R^m$, $|l|=1$, $\langle l, e_i \rangle = \cos \theta_i$ 为 l 与坐标向量 $e_i (i=1, 2, \dots, m)$ 的夹角, 求证: $l = (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \dots, \cos \theta_m)$.

15.1.4 对任意 $x, y \in R^m$, 记 $\theta = \langle x, y \rangle$ 为 x, y 的夹角, 证明:

$$(1) |x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos \theta;$$

$$(2) \text{ 若 } x, y \text{ 正交, 则 } |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2;$$

说明上述各式的几何意义.

15.1.5 对任意 $x, y \in R^m$, 证明

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

15.1.6 对任意 $x, y \in R^m$,

(1) 哥西不等式

$$|(x, y)| \leq |x| |y|$$

中等号何时成立?

(2) 三角不等式

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

中等号何时成立?

15.1.7 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

(1) 证明: 存在正常数 K_1, K_2 , 对任意 $x \in R^m$ 有

$$K_2 \sum_{i=1}^m |x_i| \leq |x| \leq K_1 \sum_{i=1}^m |x_i|,$$

其中 $|x| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

(2) 证明: 存在正常数 M_1, M_2 , 对任意 $x \in R^m$ 有

$$M_2 \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq |x| \leq M_1 \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|.$$

欧氏空间中的点集

15.2.1 $\Omega \subset R^2$, 画出下列区域 Ω 的图形, 并指出是否是开区域或闭区域, 为什么? 是有界域还是无界域?

(1) $\Omega = \{(x, y) | y > 0, x > y, x < 1\};$

(2) $\Omega = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{4}x^2 - 1 \leq y \leq 2 - x \right. \right\};$

(3) $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 1\};$

- (4) $\Omega = \{(x, y) | xy = 1\}$;
 (5) $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq y < 2, 2y \leq x \leq 2y + 2\}$;
 (6) $\Omega = \{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$.

15.2.2 $x \in R^m$, 指出下列点集是否开区域或闭区域? 是有界域还是无界域? (对 R^m 来说.)

- (1) $a < |x| < b (b > a > 0)$;
 (2) $(a_1 x \cdot e_1)^2 + \cdots + (a_m x \cdot e_m)^2 \leq 1$;
 (3) $x_m = 5, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-1}^2 < 1$.

15.2.3 设 $z \in R^m$ 是常向量, c 为常数. 证明:

- (1) 半空间 $\{x | x \in R^m, x \cdot z < c\}$ 是开集.
 (2) $\{x | x \in R^m, x \cdot z \geq c\}$ 是闭集.

15.2.4 求下列集合 Ω 的边界 $\partial\Omega$, 内部 Ω° 和闭包 $\overline{\Omega}$.

- (1) $\Omega \subset R^2, \Omega = \{(x, y) | 0 < y < x + 1, x > -1\}$;
 (2) $\Omega \subset R^2, \Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) | 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$;
 (3) $\Omega \subset R^2, \Omega = \{(x, y) | x \text{ 或 } y \text{ 是无理数}\}$;
 (4) $\Omega \subset R^m, \Omega = \{x | x, x_0 \in R^m, 0 < |x - x_0| \leq \delta\}, \delta > 0$;
 (5) $\Omega \subset R^m, \Omega = \{x | x \in R^m, |x| = 1\}$.

15.2.5 证明:

- (1) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

15.2.6 证明:

- (1) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cap B^\circ$; (2) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

并举例说明等号不成立.

15.2.7 设 G_1, G_2 是 R^m 中两个不相交的开集. 试证明: $G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

15.2.8 设 $E \subset R^m$ 是闭集, 且 $x \in \overline{E}$. 求证: $\rho(x, E) > 0$. 若 E 不是闭集, 结论还对吗?

15.2.9 设 $E \subset R^m$. 证明: $\overline{E} = \{x | \rho(x, E) = 0\}$.

15.2.10 对任意 $E \subset R^m$, 求证 ∂E 是闭集.

15.2.11 设 $E \subset R^m$, $x, y \in R^m$. 求证: $\rho(x, E) \leq \rho(x, y) + \rho(y, E)$.

15.2.12 设 A, B 是 R^m 中任意两个点集. 求证: 对任意 $x \in R^m$ 有 $\rho(A, B) \leq \rho(x, A) + \rho(x, B)$.

15.2.13 设 $E \subset R^m$, 令

$$A = \{x | x \in R^m, \rho(x, E) < r\}, B = \{x | x \in R^m, \rho(x, E) \leq r\}.$$

求证:

(1) A 是开集; (2) B 是闭集.

15.2.14 设 F 是闭集, G 是开集. 求证:

(1) $F \setminus G$ 是闭集, (2) $G \setminus F$ 是开集.

15.2.15 设 E_1, E_2 是 R^m 中的开集, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. 求证:

$$\partial(E_1 \cup E_2) = \partial E_1 \cup \partial E_2.$$

15.2.16 对任意 $E \subset R^m$,

(1) 证明 $\partial \bar{E} \subset \partial E$;

(2) 是否有 $\partial \bar{E} = \partial E$? 试证明你的判断.

15.2.17 设 $1 \leq s \leq m-1, m > 1, A \subset R^s, B \subset R^{m-s}$, 则 $A \times B \subset R^m$. 证明:

(1) 若 A, B 是开集, 则 $A \times B$ 是开集.

(2) 若 A, B 是闭集, 则 $A \times B$ 是闭集.

m 维欧氏空间的性质

15.3.1 设 R^m 中的点列 x_n 满足: $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| < +\infty$. 求证: x_n 为收敛列.

15.3.2 设 R^2 中有一列闭长方形

$$A_n = \{(x, y) | a_n \leq x \leq b_n, c_n \leq y \leq d_n\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$A_n \supset A_{n+1} (n=1, 2, \cdots),$$

A_n 的对角线长 l_n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 0$. 试用 R' 中的闭区间套定理证明: 存在唯一 $(x_0, y_0) \in A_n (n=1, 2, 3, \cdots)$.

15.3.3 设 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 是 R^m 中的有界闭集, 满足 $F_n \supset F_{n+1} (n=1, 2, \cdots)$. 又设 F_n 的直径 $d_n \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$. 求证: 存在唯一的 $x_0 \in R^m, x_0 \in F_n (n=1, 2, 3, \cdots)$.

15.3.4 设 $E \subset R^m$ 为有界闭集, A 是 E 的一个开覆盖, 它由一串开集组成, $A: A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$. 试用闭集套定理(15.3.3题)证明: 在 A 中存在 E 的有限子覆盖, 即存在 n_0 , 使得

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i \supset E.$$

15.3.5 设 $E \subset R^m$ 为有界闭集, $d(E)$ 为 E 的直径. 求证: 存在 $x_0, y_0 \in E$ 使得 $\rho(x_0, y_0) = d(E)$.

15.3.6 设 E_1, E_2 是 R^m 中的闭集, E_1, E_2 中至少有一个为有界集.

(1) 求证: 存在 $x_0 \in E_1, y_0 \in E_2$, 使得 $\rho(x_0, y_0) = \rho(E_1, E_2)$.

(2) 若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 求证 $\rho(E_1, E_2) \neq 0$.

15.3.7 设 A, B 是 R^m 中互不相交的有界闭集. 求证: 存在开集 W, V 满足 $W \supset A, V \supset B, W \cap V = \emptyset$.

15.3.8 设 Ω 是有界开区域, G 是闭区域, $G \subset \Omega$. 求证: 存在开区域 V , 使得

$$G \subset V, \overline{V} \subset \Omega.$$

多元向量函数

15.4.1 函数 $u = f(x_1) (a \leq x_1 \leq b)$ 能否看作以 $x_1, \cdots, x_m$ 为自变量, u 为因变量的 m 元函数? 试用函数定义说明之. 若可以,

请指出它的定义域.

15.4.2 确定并画出下列二元函数的定义域:

$$(1) u = x + \sqrt{y}; \quad (2) u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1};$$

$$(3) u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}; \quad (4) u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)};$$

$$(5) u = \arcsin \frac{y}{x}; \quad (6) u = \ln(x+y);$$

$$(7) u = f(x, y) = c (\text{常数}); \quad (8) u = f(x, y) = \sqrt{y};$$

$$(9) u = C_m^n (\text{组合数});$$

$$(10) u = \sqrt{(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x)^{-1}};$$

$$(11) u = \arccos \frac{x}{x+y};$$

$$(12) u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y).$$

15.4.3 确定下列三元函数的定义域, 并描述定义域的图形:

$$(1) u = \ln(xyz); \quad (2) u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2);$$

$$(3) u = (x^2 + y^2)^{-1}; \quad (4) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

15.4.4 画出下列二元函数的等高线:

$$(1) z = (x+y)^2; \quad (2) z = (x^2 + 2y^2)^{-1};$$

$$(3) z = \sqrt{xy}; \quad (4) z = |x| + y;$$

$$(5) z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}};$$

$$(6) z = \ln \sqrt{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]^{-1}} \quad (a > 0).$$

15.4.5 描述下列三元函数 $f(x, y, z)$ 的等量面 (即 $f(x, y, z) = c$ 的曲面, c 为常数).

$$(1) u = x^2 + y^2 - z^2; \quad (2) u = (x+y)^2 + z^2;$$

$$(3) u = z(x^2 + y^2 + 1)^{-1}.$$

15.4.6 作下列二元函数的图形

$$(1) z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (2) z = x^2 + 4y^2;$$

$$(3) z = x^2 - y^2; \quad (4) z = (2x^2 + 3y^2)^{-1};$$

$$(5) z = e^{-(x^2 + y^2)}; \quad (6) z = \sqrt{xy}.$$

15.4.7 说明下列方程表示什么曲面. 任选一个变量为因变量, 其余的为自变量, 是否是二元函数? 若是, 说明其定义域.

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0; \quad (2) 4x^2 + 4x + \frac{y^2}{4} - y - 3z = 0.$$

15.4.8 下列函数的图形有什么性质:

$$(1) z = f(x^2 + y^2); \quad (2) z = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$(3) z = f(y - ax); \quad (4) z = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

多元函数的极限

15.5.1 设 $x = (x_1, \dots, x_m)$, $a = (a_1, \dots, a_m)$. 证明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $x \neq a$, $|x_i - a_i| < \delta$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

15.5.2 叙述下列定义:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A; \quad (2) \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty;$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y) = A; \quad (4) \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

15.5.3 按定义证明下列极限等式:

$$(1) \lim_{(x, y) \rightarrow (3, 2)} (3x - 4y) = 1; \quad (2) \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} (x^2 + y^2) = 2;$$

$$(3) \lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} \left| \frac{1}{x - y} \right| = +\infty; \quad (4) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy - 2}{y + 1} = 3.$$

15.5.4 求下列极限:

$$(1) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x - \sin y}; \quad (2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^{\frac{3}{2}}}{x^4 + y^2};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x};$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2);$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}; \quad (6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2};$$

$$(7) \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}; \quad (8) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

15.5.5 对下列函数 $f(x, y)$, 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在:

$$(1) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}; \quad (2) f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$(3) f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y}; \quad (4) f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3};$$

$$(5) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}.$$

15.5.6 设 $f(x, y) = (xy)^{-1}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{k}x \leq y \leq kx, k > 1 \text{ 为常数} \right\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}.$$

(1) $\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in \Omega_1}} f(x, y)$ 是否存在? 为什么?

(2) $\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in \Omega_2}} f(x, y)$ 是否存在? 为什么?

15.5.7 设 $\alpha > 0, \beta > 0, r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(1) 求证: $x^\alpha y^\beta = o(r^l) (r \rightarrow 0)$, 其中 $0 < l < \alpha + \beta$;

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{r^{\alpha+\beta}}$ 是否存在?

15.5.8 设 $r = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}, x = (x_1, \cdots, x_m)$. 证明:

$$x_i o(x_j) = o(r^2) \quad (r \rightarrow 0).$$

15.5.9 叙述并证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y)$ 存在的哥西收敛准则.

15.5.10 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} [f(x) + g(y)]$ 存在的充要条件是:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 与 } \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) \text{ 同时存在.}$$

15.5.11 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$, 在任意有限区间上可积, 求证 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是:

$$\lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x) dx$$

存在.

多元函数的连续性

15.6.1 证明下列函数是全平面上的连续函数:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0); \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2 + y^2), & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0). \end{cases}$$

15.6.2 指出下列函数的本性不连续点, 并说明理由:

$$(1) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad (2) \frac{x}{x + y}; \quad (3) \frac{x + y}{x^3 + y^3};$$

$$(4) (\sin x \sin y)^{-1}; \quad (5) e^{-\frac{x}{y}}; \quad (6) |x|^{\frac{1}{|y|}}.$$

15.6.3 讨论由下式定义的函数 $f(x, y): R^2 \rightarrow R^2$ 的连续性:
($x, y \neq (0, 0)$) 时

$$u = \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}, \quad v = \frac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $u = 0, v = 0$.

15.6.4 设 $u = f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 连续, $f(x_0, y_0) > 0$. 证

明: 存在 M_0 的一个邻域 $U(M_0)$ 使 $f(x, y)$ 在 $U(M_0)$ 取正值.

15.6.5 设向量函数 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ 在 x_0 连续, $f(x_0) \neq \theta$. 求证: 存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$, 使 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 均不为零向量.

15.6.6 设 $f(x) \in C(R^m, R^1)$, 对任意实数 c , 作集合

$$E = \{x | f(x) > c\}, F = \{x | f(x) \geq c\}.$$

求证: E 是 R^m 中的开集, F 是 R^m 中的闭集.

15.6.7 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 问作为 x 的一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 是否连续? 作为 y 的一元函数 $f(x_0, y)$ 在 y_0 是否连续? 反之, 若 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 连续, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 连续, 问 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 是否一定连续, 为什么?

15.6.8 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^3}, & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 点沿过此点的每一射线

$$x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

连续, 即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0),$$

但 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续.

15.6.9 $f(x, y)$ 定义在 Ω 内, 若 $f(x, y)$ 对 x 连续, 对 y 满足李普希兹条件, 即对 Ω 中任意两点 $(x, y'), (x, y'')$ 有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

其中 L 为常数. 求证 $f(x, y)$ 在 Ω 内连续.

15.6.10 设 E 是 R^m 中的任意点集. 求证: $\rho(x, E)$ 在 R^m 一致连续.

15.6.11 设 E 是 R^m 中的有界闭集. 证明:

(1) 对给定的 $a \in R^m$, 存在 $x_0 \in E$ 使得 $\rho(a, E) = \rho(a, x_0)$.

(2) 存在 $x_0, y_0 \in E$, 使得 $d(E) = \rho(x_0, y_0)$.

15.6.12 设二元数值函数 $f(x, y)$ 在全平面连续, $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(x, y) = A$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 求证:

(1) $f(x, y)$ 在全平面有界;

(2) $f(x, y)$ 在全平面一致连续.

15.6.13 证明:

(1) 二元函数 $\cos(xy)$ 在 R^2 不一致连续;

(2) 三元函数 $\sin(xyz)$ 在 R^3 不一致连续.

15.6.14 设二元数值函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 函数序列 $\varphi_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛且 $c \leq \varphi_n(x) \leq d$. 证明: $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) (n=1, 2, \dots)$ 也在 $[a, b]$ 上一致收敛.

15.6.15 设 $f(x)$ 在 R^m 连续, 对 $x \neq \theta, f(x) > 0$, 对任意 x 和 $c > 0$ 有 $f(cx) = cf(x)$. 求证: 存在 $a > 0$ 和 $b > 0$ 使得

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \quad (x \in R^m).$$

15.6.16 A 是 $m \times m$ 矩阵, $\det A (A \text{ 的行列式}) \neq 0$. 求证: 存在正常数 α , 使得对任意 $x \in R^m$ 有

$$|Ax| \geq \alpha|x|.$$

15.6.17 设有二元数值函数 $f(x, y)$ 在圆周 $C: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ 上连续. 证明: $f(x, y)$ 在 C 上达到上确界 M 和下确界 m , 并且它取属于 (m, M) 所有值至少两次.

*

*

*

15.1 设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 邻域有定义, $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 对 $r (\theta \text{ 固定})$ 连续, 对 θ (关于 r) 一致连续. 证明: $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

15.2 证明: 若 $f(x, y)$ 分别对每一变量 x 和 y 是连续的, 并且对其中的一个是单调的, 则 $f(x, y)$ 是二元连续函数.

15.3 设有 m 元数值函数

$$g(a_1, a_2, \dots, a_m) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m|.$$

证明:

- (1) $g(a_1, \dots, a_m)$ 是 R^m 中的连续函数;
- (2) $g(a_1, \dots, a_m)$ 在单位球面 $a_1^2 + \dots + a_m^2 = 1$ 取正的最小值;
- (3) 当 $a_1^2 + \dots + a_m^2 \rightarrow +\infty$ 时, $g(a_1, \dots, a_m) \rightarrow +\infty$;
- (4) 存在多项式 $T_m(x)$, $x \in [-1, 1]$, 使得

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_m(x)| = \inf_{a_1, \dots, a_m} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m| \right\}.$$

15.4 设集合 $E \subset R^m$ 是非闭的, 函数 $f(x)$ 在 E 上一致连续. 证明: 可以唯一地把 $f(x)$ 开拓到 $\bar{E} \setminus E$ 上, 使得开拓后的函数在 $\bar{E}$ 一致连续. (即存在唯一的函数 $\hat{f}(x)$, 它在 $\bar{E}$ 上一致连续且 $x \in E$ 时 $\hat{f}(x) = f(x)$.)

15.5 我们称 $f(x)$ 在 R^m 中某区域 Ω 是李氏的, 若存在一个常数 L , 使得当 $x, y \in \Omega$ 时有

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

我们称 $f(x)$ 在 Ω 是局部李氏的, 若对 Ω 内每一点, 存在该点的一个邻域 U_0 ($U_0 \subset \Omega$), 使得 $f(x)$ 在 U_0 是李氏的. 试证明: 若 $f(x)$ 在 Ω 是局部李氏的, D 是 Ω 内的有界闭区域, 则 $f(x)$ 在 D 上是李氏的.

15.6 设函数 $f: R^m \rightarrow R^1$, 满足以下条件:

- 1° 对任意 $x \in R^m$, $f(x) \geq 0$, 仅当 $x = \theta$ 时 $f(x) = 0$;
- 2° 对任意实数 λ , $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$;
- 3° 对任意 $x, y \in R^m$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

试证明:

- (1) 存在常数 $M > 0$, 对任意 $x \in R^m$ 有 $f(x) \leq M|x|$;
 (2) $f(x)$ 在 R^m 上是李氏的, 因而一致连续;
 (3) 存在常数 $m > 0$, 对任意 $x \in R^m$ 有 $m|x| \leq f(x)$.

15.7 设 $f(x)$ 在 x_0 邻域有界, 令

$$M_f(x_0, \delta) = \sup \{f(x) : |x - x_0| < \delta\},$$

$$m_f(x_0, \delta) = \inf \{f(x) : |x - x_0| < \delta\},$$

于是存在极限

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} [M_f(x_0, \delta) - m_f(x_0, \delta)],$$

称它为 $f(x)$ 在 x_0 的振幅. 证明 $f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是:
 $\omega_f(x_0) = 0$.

15.8 设有函数 $f: R^m \rightarrow R^l$, 对任意 $E \subset R^m$, 有 $f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.
 求证: 若 $x_n \rightarrow x_0 \in R^m$, 则必有收敛子序列 $f(x_{n_k})$, 且 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$.

15.9 证明 $f(x) \in C(R^m, R^l)$ 的充要条件是: 对 R^m 中任意点集 E , 有 $f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.

15.10 证明 $f(x) \in C(R^m, R^l)$ 的充要条件是: 对 R^l 中的任一开集 E , 都有 $f^{-1}(E)$ 是 R^m 中的开集.

15.11 设 $\varphi(x)$ 是 R^m 上的实值函数, 满足:

1° $\varphi(x) \geq 0 (x \in R^m)$, $\varphi(x) = 0$ 的充要条件是 $x = \theta$;

2° $\varphi(\alpha x) = |\alpha| \varphi(x)$, α 为任意实数, $x \in R^m$;

3° 对任意 $x, y \in R^m$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

称 $\varphi(x)$ 为 R^m 中 x 的范数, 又记为 $\|x\| = \varphi(x)$. 试证明:

(1) 对任意 $x \in R^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, 定义

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|, \|x\|_2 = \max_{1 \leq i \leq m} \{|x_i|\},$$

则 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 均是 x 的范数.

(2) $\varphi(x) = \|x\|$ 是 R^m 上的一致连续函数.

(3) 设 $\|\cdot\|$ 是 R^m 中的任意一种范数, 则存在正数 M_1 和 M_2 , 使得对任意 $x \in R^m$, 有

$$M_1 \|x\|_1 \leq \|x\| \leq M_2 \|x\|_1.$$

第十六章 多元数值函数微分学

偏 导 数

16.1.1 求下列函数的偏导数:

$$(1) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(2) u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y};$$

$$(3) u = \sin(x \cos y);$$

$$(4) u = e^{\frac{x}{y}};$$

$$(5) u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy};$$

$$(6) u = \left(\frac{x}{y}\right)^2;$$

$$(7) u = x^{\frac{x}{y}};$$

$$(8) u = x^{yz};$$

$$(9) u = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$

$$(10) u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

16.1.2 求下列函数在指定点的所有偏导数:

$$(1) u = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \text{ 于 } (1, 1, 1) \text{ 处};$$

$$(2) z = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ 于 } (0, 1) \text{ 处}.$$

$$(3) u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}, \text{ 于 } (0, 0, 0) \text{ 处}.$$

16.1.3 设 $u = \ln(1 + x_1 + x_2^2 + x_3^2)$, 求 $\sum_{i=1}^3 u'_{x_i}$ 在 $(1, 1, 1)$ 点的值.

16.1.4 已知 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}$

$\frac{y}{x}$. 求 $x'_r, y'_r, x'_\theta, y'_\theta, r'_r, r'_\theta, \theta'_r, \theta'_\theta$.

16.1.5 设 $f(x)$ 在 $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ 有偏导数 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, 且偏导数在 x_0 关于 x_i 连续, 其中 $U(x_0)$ 是 x_0 的邻域.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = A_i$, 求证 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = A_i$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \infty$, 问 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ 是否存在?

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ 不存在, 问 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ 是否存在?

16.1.6 求下列函数的偏导数:

(1) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0); \end{cases}$

(2) $f(x, y) = \begin{cases} x \ln(x^2 + y^2), & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0). \end{cases}$

16.1.7 设 $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, 其中 f 为一元可微函数. 求证: z 满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

16.1.8 设 $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, 在 Ω 内 $f'_x = 0$.

(1) 能否推出在 $\bar{\Omega}$ 上 $f(x, y) \equiv$ 常数?

(2) $f(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上有何特点?

16.1.9 设 $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, 在 Ω 内 $f'_x = f'_y = 0$. 求证: 在 $\bar{\Omega}$ 上 $f(x, y) \equiv$ 常数.

16.1.10 设 $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \in C(\bar{\Omega})$. 求证:

对任意 $a \leq x \leq b, c \leq y_i \leq d (i=1, 2)$, 存在常数 L , 使得

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|.$$

16.1.11 设 $\Omega \subset R^2$ 是开区域, 在 Ω 内 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

$\equiv 0$. 求证: $f(x, y)$ 在 Ω 内为常数.

16.1.12 设 $\Omega \subset R^2$ 是开区域, $u(x, y), v(x, y)$ 在 Ω 内满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, u^2 + v^2 = C (\text{常数}).$$

求证: $u(x, y), v(x, y)$ 在 Ω 内恒为常数.

全微分与可微性

16.2.1 求下列函数的全微分:

$$(1) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (2) u = e^{xy};$$

$$(3) u = \frac{z}{x^2 + y^2}; \quad (4) u = x^{yz}.$$

16.2.2 求 $u = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在 $(x, y) = (1, 2)$ 处的全微分.

16.2.3 已知 $u = \frac{y}{x}$, 求 u 当 $x=2, y=1, dx=0.1, dy=0.2$ 时的

全微分和改变量 Δu .

16.2.4 设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 在 (x, y) 可微. 按定义证明 $u \cdot v$ 可微且 $d(u \cdot v) = u dv + v du$.

16.2.5 设 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 (x_0, y_0) 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续, 求证 $f(x, y)$

在 (x_0, y_0) 可微.

16.2.6 设 m 元函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $f(x)$ 在 x_0 连续, $g(x)$ 在 x_0 可微, $g(x_0) = 0$. 求证: $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 可微且

$$d[f(x) \cdot g(x)]|_{x=x_0} = f(x_0) dg(x_0).$$

16.2.7 设 m 元函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \leq |x|^{1+\alpha}$, 其中 $\alpha > 0$ 为

常数. 求证: $f(x)$ 在 $x=\theta$ 可微, 并求 $df(\theta)$.

16.2.8 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2+y^2 = 0). \end{cases}$$

证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微, 并求 $df(0, 0)$.

16.2.9 设 $u=f(x, y)$ 在矩形 $\Omega=(a, b) \times (c, d)$ 内可微, 且全微分 du 恒为零. 问 $f(x, y)$ 在 Ω 内是否应取常数值? 证明你的结论.

16.2.10 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0). \end{cases}$$

证明: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 连续.

16.2.11 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0). \end{cases}$$

证明:

- (1) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续;
- (2) $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$ 存在;
- (3) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 不连续;
- (4) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不可微.

16.2.12 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x^2 + y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2 + y^2 = 0). \end{cases}$$

求证:

- (1) $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ 存在;
- (2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 不连续;
- (3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

16.2.13 讨论函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{3/2}y^2}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2 \neq 0) \\ 0, & (x^2+y^2 = 0) \end{cases}$$

的连续性,可微性及偏导数的连续性.

16.2.14 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2 \neq 0), \\ 0, & (x^2+y^2 = 0). \end{cases}$$

(1) $x=x(t), y=y(t)$ 是通过原点的任意可微曲线. (即 $x^2(0)+y^2(0)=0, t \neq 0$ 时 $x^2(t)+y^2(t) \neq 0, x(t), y(t)$ 可微.) 求证: $f(x(t), y(t))$ 可微.

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

16.2.15 设 $u=u(x,y)$. 已知 du :

- (1) $du = axdx + bydy$;
- (2) $du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;
- (3) $du = (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy$.

求 u .

16.2.16 设 $|x|, |y|$ 很小, 利用全微分对下列各式推出近似公式:

- (1) $(1+x)^m(1+y)^n$;
- (2) $\arctg \frac{x+y}{1+xy}$.

16.2.17 用全微分近似函数改变量, 近似计算下列各量:

$$(1) \frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \sqrt[4]{1.05^3}}; \quad (2) \sin 29^\circ 46'.$$

16.2.18 设一扇形的中心角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 半径 $R = 20$ 米, 当 α 增加 $\Delta\alpha = 1^\circ$, 为使面积保持不变, 应把半径 R 减少多少?

16.2.19 三个电阻 r_1, r_2, r_3 并联, 若每个电阻的阻值有很小的相对误差 ϵ , 求总电阻的最大相对误差的近似值.

16.2.20 设 $y = f(x_1, \dots, x_m) = x_1^{q_1} \cdots x_m^{q_m}$, q_i 为正整数 ($i = 1, 2, 3, \dots, m$). 若每个 $x_i = x_i^* (> 0)$ 的绝对误差为 Δx_i , 那么由 $x_1^*, \dots, x_m^*$ 计算 y 时, 其相对误差约为多少?

16.2.21 A 点对空中目标 M 的水平距离为 l , 仰角为 γ , 高度为 h , 见图 8.

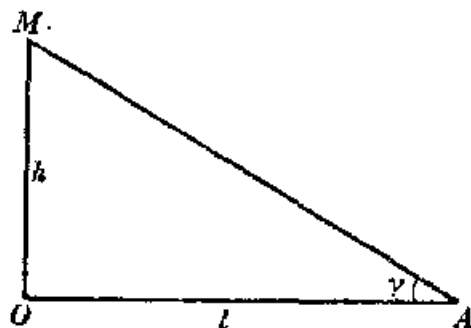


图 8

(1) 在 A 点观测 M , 水平距离和仰角的观测值分别为 l^* 和 γ^* 其误差分别为 $\Delta l = l - l^*$, $\Delta\gamma = \gamma - \gamma^*$, 由 l^*, γ^* 求出高度 h 的近似值 h^* , 并导出绝对误差 $|h - h^*|$ 的近似公式.

(2) 今在 A 点测得 $l^* = 100$ 米 ± 0.05 米, $\gamma^* = 30^\circ \pm 1^\circ$. 由观测值求出高度 h 的近似值 h^* , 并估计 $|h - h^*|$.

(3) 若变动观测点 A 的位置, 水平距离与仰角的最大绝对误差 $\delta l, \delta\gamma$ 保持不变, 并设 $\frac{\delta l}{h\delta\gamma}$ 很小, 由绝对误差的近似公式说明, 仰角 γ 取何值时, 高度的最大绝对误差最小.

复合函数的偏导数与可微性

16.3.1 设 $u=f(x, y, z)$, $x=x(s, t)$, $y=y(s, t)$, $z=z(s, t)$. 写出求复合函数 $u=f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$ 的链锁法则.

16.3.2 求下列复合函数的偏导数:

(1) $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$; (2) $u=f(x^2+y^2+z^2)$;

(3) $u=f\left(\frac{xz}{y}\right)$; (4) $u=f\left(x, \frac{x}{y}\right)$;

(5) $u=f(x, xy, xyz)$; (6) $u=f(x+y, z)$;

(7) $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$;

(8) $u=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$; (9) $u=f(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$;

(10) $u=f\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

16.3.3 $u=f(x, y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

(1) 求 $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$;

(2) 证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

16.3.4 $u=f(x, y, z)$, $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\cos\theta\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$, 求 $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$.

16.3.5 设 $u=x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$. 证明 u 满足

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial u}{\partial y} + \beta z\frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

16.3.6 设

$$x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uv}, z = \sqrt{uw}, f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

证明:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

16.3.7 一质量为 m 的质点在可微曲面 $z = f(x, y)$ 上运动, 若 $x(t), y(t)$ 是 t 时刻质点的水平坐标, 求它的动能.

16.3.8 设可微函数 $u = f(x, y)$ 满足方程

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

证明: $f(x, y)$ 在极坐标系里只是 θ 的函数.

16.3.9 设可微函数 $u = f(x, y)$ 满足方程

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

证明: $f(x, y)$ 在极坐标系里只是 r 的函数.

16.3.10 设 Ω 为含原点的凸开区域, $u = f(x, y)$ 可微, 且满足

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

求证: $f(x, y)$ 在 Ω 上恒为常数.

16.3.11 若函数 $f(x, y, z)$ 对任意正实数 t 满足关系

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z),$$

则称 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数. 设 $f(x, y, z)$ 可微, 试证明 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f(x, y, z).$$

16.3.12 设二元可微函数 $F(x, y)$ 在直角坐标系里可写成 $F(x, y) = f(x) + g(y)$, 在极坐标系里可写成 $F(x, y) = S(r)$, 试求二元函数 $F(x, y)$.

16.3.13 设有二元可微函数 $F(x, y) = f(x)g(y)$:

(1) 在极坐标系里可表成 $F(x, y) = S(r)$, 求 $F(x, y)$.

(2) 在极坐标系里可表成 $F(x, y) = \varphi(\theta)$ 求 $F(x, y)$.

16.3.14 设 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ 在 (ξ, η) 有连续的偏导数. $u = f(x, y)$ 在相应的 (x, y) 也有连续的偏导数, 试证明: $u = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ 在 (ξ, η) 有连续的偏导数.

16.3.15 利用全微分运算法则求下列函数的全微分, 然后求偏导数.

(1) $u = \sin(2x + y)$;

(2) $u = e^{x+2y+3z}$;

(3) $u = \lg^{-1} \frac{y}{x}$;

(4) $u = e^{xy} \sin(x + y)$;

(5) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(6) $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$.

16.3.16 利用一阶全微分形式的不变性证明全微分的四则运算法则.

16.3.17 设 $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ 在以原点为心, R 为半径的球内可微, $f(\theta) = 0$. 求证:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=tx} dt.$$

16.3.18 设可微函数 $u = f(x, y)$ 满足

$$y f'_x - x f'_y = 0.$$

作变换 $\xi = x, \eta = x^2 + y^2$, 变换上述方程并证明

$$f(x, y) = F(x^2 + y^2).$$

16.3.19 证明方程 $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的解为 $u = f(x^2 - y^2)$.

16.3.20 作自变量替换求解方程:

(1) 令 $\xi = x, \eta = xy$, 求方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

的解.

(2) 令 $\xi = x, \eta = y - x, \zeta = z - x$, 求方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

的解.

方向导数

16.4.1 求 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)}$:

(1) $u = x^2 - y^2, (x_0, y_0) = (1, 1), \langle l, e_1 \rangle = \frac{\pi}{3}, \langle l, e_2 \rangle = \frac{\pi}{6}$;

(2) $u = \ln(x^2 + y^2), (x_0, y_0) = (1, 1), l$ 与 x 轴正向夹角为 60° ;

(3) $u = xe^{xy}, (x_0, y_0) = (1, 1), l$ 与向量 $(1, 1)$ 同向.

16.4.2 求 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$:

(1) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0), l$ 与向量 $(1, -1, 2)$ 同向;

(2) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1), l$ 与向量 $(2, 1, -1)$ 同向.

16.4.3 设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 单位向量 $l_1 =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), l_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_1} = 1, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_2} = 0,$$

确定 l 使得

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

16.4.4 设 $f(x, y)$ 在 $P_0 = (2, 0)$ 指向 $P_1 = (2, -2)$ 的方向导数是 1, 指向原点的方向导数是 -3. 试回答:

(1) 指向 $P_2 = (2, 1)$ 的方向导数是多少?

(2) 指向 $P_3 = (3, 2)$ 的方向导数是多少?

16.4.5 设 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

求 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$. 又问在怎样的方向上此方向导数:

(1) 有最大值; (2) 有最小值;

(3) 等于零.

16.4.6 设 $f(x, y, z) = |x + y - z|$. 在点 $M_0(1, -1, 0)$ 处, 哪些方向 l 的方向导数 $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ 存在?

16.4.7 设 $f(x, y)$ 可微, l 是一确定的单位向量, 对任意 x, y 有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial l} \equiv 0$. 问此函数有何特点?

16.4.8 设 $u = f(x)$. 求证 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial l}$ 存在的充要条件是:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \quad (x - x_0 \text{ 与 } l \text{ 同向})$$

与

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{-|x - x_0|} \quad (x - x_0 \text{ 与 } l \text{ 反向})$$

存在且相等.

16.4.9 设 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, 在 P_0 点给定 n 个单位向量 $l_1, l_2, \dots, l_n$, 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l_i} = 0.$$

16.4.10 设 $f(x, y)$ 在区域 Ω 可微; 给定两个方向 l_1, l_2 , 它们之间的夹角为 $\varphi (0 < \varphi < \pi)$. 证明:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2};$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2}.$$

16.4.11 在 R^m 中给了一组线性无关的单位向量 $l_1, l_2, \dots, l_m$, 又设 $f(x)$ 可微, 求证: 若 $\frac{\partial f(x)}{\partial l_i} \equiv 0 (i=1, 2, \dots, m)$, 则 $f(x) \equiv C$ (常数).

16.4.12 设在 R^m 中给了一组互相正交的单位向量 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$, 又给定了一个可微函数 $f(x)$, 求证:

(1) 若 l 为单位向量, 则

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(x)}{\partial \tau_i} \cos \langle l, \tau_i \rangle;$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f(x)}{\partial \tau_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)^2.$$

16.4.13 证明梯度的运算法则:

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v, \quad \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u,$$

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla u.$$

16.4.14 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 求下列梯度:

$$(1) \operatorname{grad} r; \quad (2) \operatorname{grad} \frac{1}{r};$$

$$(3) \operatorname{grad}(r^{-n}); \quad (4) \operatorname{grad}((ax+by+cz)r).$$

16.4.15 求函数 $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的梯度, 在何处其梯度满足:

(1) 垂直于 z 轴, (2) 平行于 z 轴,

(3) 为零向量.

16.4.16 求函数 $u = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ 在点 $A(1, 2, 2)$ 与 B

$(-3, 1, 0)$ 处两梯度之间的夹角.

16.4.17 设 $u=f(r, \theta)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 求证:

$$\nabla u = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta}_0$$

其中 $\mathbf{r}_0$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 分别是径向与圆周方向的单位向量, 见图 9. $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}$.

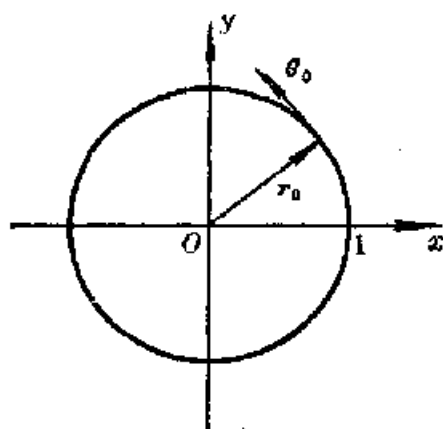


图 9

高阶偏导数和高阶全微分

16.5.1 求下列函数的二阶偏导数

- (1) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; (2) $u = xy + \frac{y}{x}$;
(3) $u = \ln(x^2 + y^2)$; (4) $u = (xy)^z$.

16.5.2 对下列函数求指定阶的偏导数:

(1) $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$, 求各三阶偏导数;

(2) $u = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$, 求各三阶偏导数;

(3) $u = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$;

(4) $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$, 求 $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$;

(5) $u = \sin(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$;

(6) $u = e^{xyz}$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

(7) $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$, 求 $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$;

$$(8) f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ 求 } f''_{xx}(x, 1);$$

$$(9) u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}, \text{ 求 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0,0)};$$

$$(10) u = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j, \text{ 求所有二阶偏导数};$$

$$(11) f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x^2+y^2 \neq 0), \\ 0 & (x^2+y^2 = 0), \end{cases} \text{ 求 } f''_{xx}(0, 0),$$

$$f''_{xy}(0, 0).$$

16.5.3 验证下列函数中的每一个都满足

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$(1) u = \ln(x^2 + y^2); \quad (2) u = x^2 - y^2;$$

$$(3) u = e^x \cos y; \quad (4) u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

16.5.4 证明: 函数

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}} \quad (a, b \text{ 为实数}),$$

当 $t > 0$ 时满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

16.5.5 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$, $\nabla^2 v = 0$, 令 $F = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$. 证明: 当 $p \geq 2$ 时

$$\nabla^2 (F^p) \geq 0.$$

16.5.6 求高阶偏导数:

$$(1) u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q, \text{ 求 } \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q};$$

$$(2) u = \frac{x+y}{x-y} (x \neq y), \text{ 求 } \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n};$$

$$(3) u = \ln(ax + by), \text{ 求 } \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n};$$

$$(4) u = xyz e^{x+y+z}, \text{ 求 } \frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}.$$

16.5.7 求下列函数的二阶偏导数:

$$(1) u = f(ax, by); \quad (2) u = f(x+y, x-y);$$

$$(3) u = f(x+y, xy); \quad (4) u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2);$$

$$(5) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right); \quad (6) u = f(x^2+y^2+z^2).$$

16.5.8 设 $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u},$$

又设 $w = w(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

证明:

(1) 函数 $w = w(f(u, v), g(u, v))$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0;$$

$$(2) \frac{\partial^2 (fg)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 (fg)}{\partial v^2} = 0.$$

16.5.9 给定空间直角坐标系中的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

作柱坐标变换, 求柱坐标系中的拉普拉斯方程.

16.5.10 利用上题求拉普拉斯方程的球坐标形式.

提示: 球坐标变换看成下面两个变换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} z = \rho \cos \varphi \\ r = \rho \sin \varphi \\ \theta = \theta \end{cases}$$

的复合.

16.5.11 设 $u=u(x, y)$ 有连续的二阶偏导数, 满足

$$u''_{xx}-u''_{yy}=0,$$

且 $u(x, 2x)=x, u'_x(x, 2x)=x^2$.

(1) 求 $u'_y(x, 2x)$;

(2) 求 $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$.

16.5.12 设 $u=u(x, y)$, 解下列方程:

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0; \quad (2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0;$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x+y.$$

16.5.13 试证明:

(1) $f(x, y)=ax+by+c$ 的充要条件是 $\text{grad} f(x, y)$ 为常向量.

(2) $f(x, y)=ax+by+c$ 的充要条件是:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0.$$

16.5.14 试确定 $f \in C^{(2)}(R^2)$ 使之满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

16.5.15 试作变量替换 $\xi=x+t, \eta=x-t$, 求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

并验证之.

16.5.16 设 $x=e^s, y=e^t$, 变换方程

$$ax^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

16.5.17 解方程

$$3x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

16.5.18 在函数类 $f(\sqrt{x^2+y^2})$ 中求解拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

16.5.19 设 $f(x, y, z) = g(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(1) 直接计算

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

(2) 若 $\nabla^2 f = 0$, 证明 $f = ar^{-1} + b$, 其中 a, b 为常数.

16.5.20 证明: 不存在函数 $f(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

16.5.21 设 $f(x, y)$ 在开区域 Ω 上 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 存在并连续.

证明: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在 Ω 内存在, 连续且有

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

16.5.22 设 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 可微. 求证:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}.$$

泰勒公式

16.6.1 证明泰勒公式的唯一性.

(1) 设 $\sum_{i+j=0}^n A_{ij} x^i y^j + o(\rho^n) = 0 (\rho \rightarrow 0)$, 其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

求证 $A_{ij} = 0$ (i, j 为非负整数, $i + j = 0, 1, 2, \dots, n$).

(2) 设 $P_n(x) + o(\rho^n) = 0 (\rho \rightarrow 0)$, 其中 $\rho = |x|$,

$$P_n(x) = \sum_{|k| \leq n} a_k x^k,$$

而

$$a_k = a_{k_1, k_2, \dots, k_n}, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i, \quad x^k = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

$k_1, \dots, k_n$ 为非负整数. 证明:

$$a_k = 0, \quad |k| \leq n.$$

16.6.2 求函数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 2y + 4$ 在 $(-1, 1)$ 点邻域的泰勒展开.

16.6.3 求函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 在 $(1, 1, 1)$ 邻域的泰勒展开.

16.6.4 求函数 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ 在 $(1, 1)$ 点邻域带余项的泰勒公式.

16.6.5 求函数 $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$ 在 $(1, -1)$ 点邻域的二阶泰勒公式, 并写出余项.

16.6.6 求下列函数在 $(0, 0)$ 点邻域带皮亚诺余项的四阶泰勒公式:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| (1) $u = \sin(x^2 + y^2);$ | (2) $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2};$ |
| (3) $u = \ln(1+x)\ln(1+y);$ | (4) $u = e^x \cos y;$ |
| (5) $u = \ln(1+x+y).$ | |

16.6.7 设 $f(x, y) = \psi(ax + by)$, 其中 a, b 为常数, 在包含原点的某邻域内, $\psi \in C^{(q)}$. 求证: 在 $(0, 0)$ 点邻域的泰勒公式是

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (ax)^j (by)^{k-j} + R_q(x, y).$$

16.6.8 求 $f(x, y) = e^{x+y}$ 在 $(0, 0)$ 邻域的 n 阶泰勒公式并写

出余项.

16.6.9 求 $f(x, y) = \frac{1}{x} \cos y$ 在 $(x_0, y_0) = (1, 0)$ 的 n 阶泰勒展开式, 并证明在 (x_0, y_0) 的某邻域内, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 其余项 $R_n(x, y) \rightarrow 0$.

16.6.10 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} & (x^2+y^2 \neq 0), \\ 0 & (x^2+y^2 = 0). \end{cases}$$

求 $(0, 0)$ 邻域的四阶泰勒展式, 并求 $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^4}$.

16.6.11 若 $|x|, |y|$ 为很小的量, 导出下列函数准确到二次项的近似公式:

$$(1) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad (2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x+y}{1-xy}.$$

由一个方程式确定的隐函数及其微分法

16.7.1 对由下列各方程式所定义的函数 y 求出 y' 和 y'' .

$$(1) x^2 + 2xy - y^2 = a^2; \quad (2) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x};$$

$$(3) y = 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad (4) xy - 2^x \ln 2 + 2^y = 0.$$

16.7.2 对下列方程确定的函数 $z = z(x, y)$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$(1) x^n + y^n + z^n = a^n; \quad (2) x + y + z = e^{x+y+z};$$

$$(3) e^{-xy} - 2z + e^z = 0; \quad (4) z^x = y^z.$$

16.7.3 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定 $z = z(x, y)$, 求 dz .

16.7.4 设 $xy + yz + zx = 1$ 确定 $z = z(x, y)$, 求一、二阶偏导数.

16.7.5 设 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ 确定 $z = z(x, y)$, 求所有二阶偏导数.

16.7.6 设

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \quad (*)$$

及

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

求:

(1) $f'_x(1, 1, 1)$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 (*) 确定的隐函数.

(2) $f'_x(1, 1, 1)$, 其中 $y = y(x, z)$ 是由方程 (*) 确定的隐函数.

16.7.7 求由下列方程确定的函数 $z = z(x, y)$ 的微分:

(1) $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$;

(2) $z = f(xz, z - y)$;

(3) $f(x - y, y - z, z - x) = 0$;

(4) $f(x, x + y, x + y + z) = 0$.

16.7.8 设 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所确定. 证明

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

16.7.9 设 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$$

所确定. 证明

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

16.7.10 设 $u = u(x, y, z)$ 由方程

$$F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$$

所确定. 证明

$$\frac{u'_x}{x} + \frac{u'_y}{y} + \frac{u'_z}{z} = \frac{1}{u}.$$

16.7.11 求下列函数 $z = z(x, y)$ 的二阶偏导数:

(1) $z = f(x + y, z + y);$

(2) $f(x + y, y + z, z + x) = 0.$

16.7.12 证明: 由方程 $u = y + x\varphi(u)$ 确定的函数 $u = u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi^2(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

16.7.13 证明: 由方程 $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

16.7.14 已知 $z + e^z + x - 2y - 1 = 0$. 求 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的二阶近似公式, 其中 $f(0, 0) = 0$.

16.7.15 已知方程

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (A)$$

设

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (B)$$

为满足方程(A)的函数.

(1) 问有多少函数(B)满足方程(A)?

(2) 有多少连续函数(B)满足方程(A)?

(3) 又设: (a) $y(0) = 1$, (b) $y(1) = 0$, 问有多少连续函数(B)满足方程(A)?

16.7.16 设

$$x = y + \varphi(y), \quad (C)$$

其中 $\varphi(0)=0$, 且当 $-a < y < a$ 时 $|\varphi'(y)| \leq K < 1$. 证明: 存在 $\delta > 0$, 当 $-\delta < x < \delta$ 时, 存在唯一的可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 (C) 且 $y(0)=0$.

16.7.17 方程 $x^2 + y + \sin(xy) = 0$ 确定连续曲线. 在 原点附近能否用形如 $y=f(x)$ 的方程表示? 又能否用 $x=g(y)$ 的方程表示.

16.7.18 证明方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0)$$

在点 $x=0, y=0$ 邻域定义两个可微函数 $y=y_1(x), y=y_2(x)$, 并求 $y'_1(0), y'_2(0)$ (不直接求解方程).

16.7.19 设

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3.$$

问此方程在 $x=0, y=0$ 邻域确定几个可微函数? 并求 $y'(0)$.

*

*

16.1 设 $f(x, y)$ 是 R^2 上的可微函数, 满足

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y \right) \geq \alpha > 0,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, α 为常数. 证明: $f(x, y)$ 有最小值.

16.2 在开区域 Ω 内, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 问是否有 f 关于 y 为常数?

16.3 设 $f(x)$ 定义在 R^m 中的凸开区域 Ω 内, 对任意 $x_1, x_2 \in \Omega, t \in [0, 1]$, $f(x)$ 满足

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 Ω 内是凹函数.

(1) 设 $f(x)$ 在凸开区域 Ω 内可微. 求证 $f(x)$ 在 Ω 内是凹函数的充要条件是: 对每个 $x, x_0 \in \Omega$, 有

$$f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0).$$

(2) 设 Ω 是凸开区域, $f(x) \in C^{(2)}(\Omega)$, 海色矩阵 $H_f(x)$ 对任意 $x \in \Omega$ 是半正定的. 求证: $f(x)$ 是 Ω 内的凹函数.

16.4 函数 $V(x, y)$ 满足: (1) 在 $(0, 0)$ 邻域属于 $C^{(2)}$; (2) $V(0, y) = 0, \frac{\partial V(0, 0)}{\partial x} = 0$; (3) $\frac{\partial^2 V(0, 0)}{\partial x \partial y} \neq 0$. 问方程 $V(x, y) = 0$ 在 origin 邻域是否确定隐函数 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = 0$.

16.5 设函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 $\Omega: a < x < b, 0 \leq y < h$ 上属于 $C^{(n)}$, 令

$$\varphi^*(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & (a < x < b, h \geq y \geq 0) \\ \lambda_1 \varphi(x, -y) + \lambda_2 \varphi\left(x, -\frac{1}{2}y\right) + \cdots + \\ \quad + \lambda_{n+1} \varphi\left(x, -\frac{1}{n+1}y\right) & (a < x < b, -h \leq y < 0), \end{cases}$$

试证: 存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ 使得 $\varphi^*(x, y) \in C^{(n)}(\Omega^*)$, 其中 $\Omega^*: a < x < b, -h < y < h$.

第十七章 多元向量函数微分学

线性变换

17.1.1 对任意 $n \times m$ 矩阵 A , 定义

$$\|A\| = \max\{|Ax| \mid x \in R^m, |x| = 1\}.$$

求证:

- (1) $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0$ 的充要条件是 A 为零矩阵;
- (2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ (α 为任意实数);
- (3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

17.1.2 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, $A = (a_{ij})$. 求证

$$|a_{ij}| \leq \|A\| \leq \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

17.1.3 设有 $n \times m$ 矩阵列 $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ 及矩阵 $A = (a_{ij})$.

求证: $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$, 即 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A_k - A\| = 0$ 的充要条件是,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m).$$

17.1.4 设有矩阵函数

$$A(x) = (a_{ij}(x)).$$

求证: $A(x)$ 在 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|A(x) - A(x_0)\| = 0$$

的充要条件是: $A(x)$ 的每个元素 $a_{ij}(x)$ 在 x_0 连续. (这里 $a_{ij}(x)$ 是 m 元数值函数.)

向量函数的可微性与导数

17.2.1 求 $Df(x, y)$:

$$(1) f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ x^2 - 2xy \\ 3x^2y - 2y \end{pmatrix}; \quad (2) f(x, y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2 + y^2) \\ \arctg \frac{y}{x} \end{pmatrix};$$

$$(3) f(x, y) = e^{x+2y} \mathbf{i} + \sin(y+2x) \mathbf{j}.$$

17.2.2 求 $Df(x, y, z)$:

$$(1) f(x, y, z) = (x + 2y^2 + 3z^3) \mathbf{i} + (2y - x^2) \mathbf{j};$$

$$(2) f(x, y, z) = xy^2z^2 \mathbf{i} + z^2 \sin y \mathbf{j} + x^2 e^y \mathbf{k}.$$

17.2.3 设 $f(x)$ 在 x_0 可微. 求证: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in U(x_0; \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (\|Df(x_0)\| + \varepsilon) |x - x_0|.$$

17.2.4 设 $x \in R^m$, $f(x), g(x) \in R^n$ 在 x_0 可微. 按定义证明 $f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 可微, 并求它们的导数.

17.2.5 设 $\Omega \subset R^m$ 是开区域, $f(x)$ 在 Ω 可微, $Df(x)$ 在 Ω 为常数矩阵 A . 求证: $f(x) = Ax + x_0$, x_0 为某常向量.

17.2.6 证明数值函数 $f(x_1, \dots, x_m) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + b$ 的充要条件是它的海色矩阵恒为零矩阵.

17.2.7 设 $f: R^3 \rightarrow R^3$ 是可微向量函数.

$$(1) Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{求 } f(x, y, z);$$

$$(2) Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 & 0 \\ 0 & q(y) & 0 \\ 0 & 0 & r(z) \end{pmatrix}, \text{求 } f(x, y, z).$$

17.2.8 设 $f(x)$ 在 Ω 可微, 对任意 $x \in \Omega$, $\det Df(x) \neq 0$, 给定 $y \in \overline{f(\Omega)}$, 记 $\psi(x) = |y - f(x)|^2$. 求证: 对任意 $x \in \Omega$, $D\psi(x) \neq 0$.

17.2.9 设 $x \in R^m$, $f(x) \in R^m$, $\Omega \subset R^m$ 是开区域.

(1) 若 $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) = 0$, $f(x)$ 在 x_0 可微, $\det Df(x_0) \neq 0$. 求证: $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的孤立零点, 即存在 $\delta > 0$, 当 $x \in U(x_0; \delta) \setminus \{x_0\}$ 时 $f(x) \neq 0$.

(2) 若 $f(x)$ 在 Ω 可微, 对任意 $x \in \Omega$, $\det Df(x) \neq 0$, $\Omega_0 \subset \Omega$ 是有界闭域. 求证: 对任意 $p \in R^m$, 在 Ω_0 至多有有限个点 $x_1, x_2, \dots, x_k$, 使得 $f(x_i) = p (i = 1, 2, \dots, k)$.

17.2.10 设 $f(x) = (Ax - b, Ax - b)$, 其中 $(\cdot, \cdot)$ 是内积, A 是 $n \times m$ 矩阵, $x \in R^m$, $b \in R^n$, 又设 $\det A^T A \neq 0$, 求满足 $Df(x) = 0$ 的 x 值.

17.2.11 设 $f(t) \in R^3$, $g(t) \in R^3$ 均可微, t 为实数. 求证:

$$\frac{d[f(t) \times g(t)]}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \times g(t) + f(t) \times \frac{dg(t)}{dt}.$$

17.2.12 设 xy 平面上有一单位向量 $r_0(t)$, 绕原点按逆时针

方向旋转, t 时刻的角速度为 $\theta(t)$, 记 $\tau(t) = \frac{dr_0(t)}{dt}$. 求证: $\tau \perp r_0$,

$$|\tau(t)| = \dot{\theta}(t).$$

17.2.13 求雅可比行列式

(1) 设 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$.

(2) 设 $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$. 求 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}$.

(3) 设 $u = \frac{x}{r^2}$, $v = \frac{y}{r^2}$, $w = \frac{z}{r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. 求 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$.

(4) 设 f_i, φ_i 连续可微, 且

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n))$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

求

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

17.2.14 求下列向量的导数(矩阵写法):

(1) $f(x, y, z) = g\left(x^2 - y^2, xy, \frac{z}{x}\right)$, $g \in C^{(1)}$, 求 $Df(x, y, z)$.

(2) $f(x, y, z) = g(x, u, v)$, $u = p(x, y)$, $v = h(y, z)$, $g, p, h \in C^{(1)}$, 求 $Df(3, -2, 1)$.

(3) $f(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi(x+y) \\ \varphi(x-y) \end{pmatrix}$, $F(s, t) = f(e^t, e^{-s})$, $\varphi \in C^{(1)}$, 求 $DF(s, t)$.

17.2.15 试用链锁法则证明向量内积的求导公式:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f^T(x) Dg(x) + g^T(x) Df(x).$$

17.2.16 设 $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$, $x=x(s, t)$, $y=y(s, t)$, $z=z(s, t)$, 均属于 $C^{(1)}$. 证明:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)}.$$

17.2.17 设 $x \in R^n$, $f(x) \in C^{(2)}(U(x_0), R^1)$, $Df(x_0) = 0$, $\det H_f(x_0) \neq 0$. 求证: 存在 x_0 的某邻域 $U(x_0; \delta)$, 当 $x \in U(x_0; \delta)$, $x \neq x_0$ 时 $Df(x) \neq 0$.

17.2.18 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是正交矩阵, $f(y) \in C^{(2)}(R^n, R^1)$, $F(x) = f(Ax)$. 求证:

$$(1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2;$$

$$(2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}.$$

反函数及其微分法

17.3.1 对下列函数 $f(x, y)$, 当 $(x, y) \in \Omega \subset R^2$ 时是否有 $\det Df(x, y) \neq 0$? 求出 $f(\Omega)$, 若 $f(x, y)$ 是单叶的, 再求出 $f^{-1}(x, y)$.

$$(1) f(x, y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}, \Omega = R^2;$$

$$(2) f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2-x-2 \\ 3y \end{pmatrix}, \Omega = R^2;$$

$$(3) f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \Omega = R^2 \setminus \{(0, 0)\};$$

$$(4) f(x, y) = \begin{pmatrix} \ln(xy) \\ \frac{1}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \Omega = \{(x, y) \mid 0 < y < x\}.$$

17.3.2 设

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(1) 求证: 当 $(x, y) \in R^2$ 时 $\det Df(x, y) \neq 0$, 但 $f(x, y)$ 不是单叶函数;

(2) 记 $\Omega = \{(x, y) | 0 < y < 2\pi\}$, 求证 $f(x, y)$ 在 Ω 上是单叶的, 并求它的反函数.

17.3.3 设

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) 求证: $f'(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 有界;

(2) 求证: $f(x)$ 在原点的任何邻域不是单叶函数;

(3) 此例与反函数定理是否矛盾? 为什么?

17.3.4 设

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $f^{-1}(x, y)$;

(2) 是否有 $\det Df(x, y) \neq 0$, $f^{-1}(x, y)$ 是否处处可微?

17.3.5 设区域 $\Omega \subset R^m$, $f(x)$ 是 Ω 内的单叶连续函数, $\Gamma: x = x(t) (t \in [a, b])$ 是 Ω 内的简单曲线. 求证 Γ 的象 $f(\Gamma)$ 也是简单曲线.

17.3.6 设 $\Omega \subset R^m$, $f(x) \in R^m$, 满足: 对任意 $x, z \in \Omega$ 有 $|f(x) - f(z)| \geq \alpha |x - z|$, 其中 $\alpha > 0$ 为常数. 求证: 存在 $f^{-1}(x)$ 且在 $f(\Omega)$ 连续.

17.3.7 设 $\overline{\Omega} \subset R^m$ 是有界闭区域, $f(x) \in C(\overline{\Omega}, R^m)$ 且是单叶的. 求证: $f^{-1}(x)$ 在 $f(\overline{\Omega})$ 连续.

17.3.8 求证下列函数 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(x, y)$ 在 $\Omega \subset R^2$ 是单叶的, 求

出 $f^{-1}(x, y)$, $\det Df(x, y)$, $\det Df^{-1}(x, y)$, 并分别在 xy 平面和 uv 平面上画出 Ω 和 $f(\Omega)$.

$$(1) \begin{cases} u = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ v = -x \sin \theta + y \cos \theta, \end{cases} \quad \Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$(2) \begin{cases} u = \frac{y^2}{x}, \\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad \Omega \text{ 由抛物线 } y^2 = x, y^2 = 4x \text{ 和直线 } y = x, y = 2x \text{ 所围成.}$$

17.3.9 对下列函数求出单叶性区域, 并计算

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

$$(1) u = xy, \quad v = \frac{x}{y};$$

$$(2) u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$(3) u = x^2 + y^2, \quad v = 2xy.$$

17.3.10 求反函数的偏导数:

$$(1) \text{ 设 } u = x \cos \frac{y}{x}, v = x \sin \frac{y}{x}. \text{ 求 } \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}.$$

$$(2) \text{ 设 } u = e^x + x \sin y, v = e^x - x \cos y. \text{ 求 } \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}.$$

17.3.11 设 $\Omega \subset R^m$ 是开凸集, $f(x) \in R^m$, $f(x)$ 在 Ω 可微, $Df(x)$ 在 Ω 是正定矩阵. 求证: $f(x)$ 是 Ω 上的单叶函数.

17.3.12 求证: 函数

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = \frac{1}{2} \ln(x + y) \end{cases}$$

在区域 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, x + y > 0\}$ 是单叶的.

17.3.13 设 $\Omega \subset R^m$ 是开区域(连通开集), $f(x)$ 是 Ω 上的单叶函数, $f(x) \in C^{(1)}(\Omega, R^m)$, $\det Df(x) \neq 0 (x \in \Omega)$. 求证: $f(\Omega)$

是开区域.

由方程组确定的隐函数及其微分法

17.4.1 试由方程式的隐函数存在定理证明方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

的隐函数存在定理.

17.4.2 证明: 能把方程组

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$

中 x, y, u 用 z 表出, x, z, u 用 y 表出, y, z, u 用 x 表出, 但不能把 x, y, z 用 u 表出.

17.4.3 由下列方程组求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$.

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

17.4.4 由下列方程组求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

$$(1) \begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = u + v, \\ \frac{x}{y} = \frac{\sin u}{\sin v}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u^2 - v = 3x + y, \\ u - 2v^2 = x - 2y. \end{cases}$$

17.4.5 设

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cos \psi, \\ y = \cos \varphi \sin \psi, \\ z = \sin \varphi. \end{cases}$$

求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

17.4.6 求由方程组

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$$

确定的函数 $z = z(x, y)$ 的所有二阶偏导数.

17.4.7 求由下列方程组所确定的函数 $u = u(x, y)$ 的所有二阶偏导数.

$$(1) \quad u = yz + zx + xy, x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$(2) \quad u = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

17.4.8 设

$$\begin{cases} u = f(x - ut, y - ut, z - ut), \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. 这时 t 是自变量还是因变量?

17.4.9 设

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t), \\ g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0. \end{cases}$$

什么条件下 u 是 x, y 的函数? 并求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

17.4.10 设函数 $u = u(x)$ 由方程组

$$u = f(x, y, z), g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$$

定义. 求 $\frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}$.

17.4.11 设 $z = z(x, y)$ 满足方程组

$$f(x, y, z, t) = 0, g(x, y, z, t) = 0.$$

求 dz .

17.4.12 设 $x \in R^m, y \in R^n, F(x, y) \in R^n$. 又设 $F(x, y) \in C^{(1)}$,

$\det D_y F(x, y) \neq 0$, 由方程组

$$F(x, y) = 0$$

确定隐函数 $y = y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$.

(1) 求证:

$$Dy(x) = -[D_y F(x, y)]^{-1} D_x F(x, y);$$

(2) 若 $n = m$, 求证:

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} / \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}.$$

17.4.13 设

$$x_1 = r \cos \theta_1,$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3,$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1} = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1},$$

$$x_m = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{m-1}.$$

(1) 证明:

$$F_1 = r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2) = 0,$$

$$F_2 = r^2 \sin^2 \theta_1 - (x_2^2 + \cdots + x_m^2) = 0,$$

$$F_3 = r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 - (x_3^2 + \cdots + x_m^2) = 0,$$

$$\vdots$$

$$F_m = r^2 \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{m-1} - x_m^2 = 0;$$

(2) 利用第 17.4.12 题(2)求 $\frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})}$.

17.4.14 设 $\varphi(x, y) = \varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ 是 $2m$ 元数值函数. $\varphi(x, y) \in C^{(2)}$, 关于 $x_1, \dots, x_m$ 是二次齐次函数, 即

$$\varphi(tx, y) = t^2 \varphi(x, y).$$

φ 作为 x 的函数, 其海色矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}.$$

(1) 求证: $D_x \varphi = x^T H$;

(2) 设 $\det H \neq 0$, 作自变量替换

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

求证: 函数 $\varphi(x, y)$ 变成 $\psi(\xi, y)$;

(3) 求证: $(D_\xi \psi)^T = x$.

函数相关性

17.5.1 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上导数不为零. 求证: (a, b) 上任意函数 $y = \varphi(x)$ 可以用 $f(x)$ 表示.

17.5.2 设 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = x + y + z$. 问在任意区域内, 它们是否相互表示?

17.5.3 给定 $C^{(1)}$ 函数组

$$u = f_1(x, y), v = f_2(x, y), w = f_3(x, y),$$

并设在开区域 Ω 内 $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$.

(1) 对任意 $M \in \Omega$, 是否存在 M 的一个邻域 $U(M)$, 在此邻域有 $f_3(x, y) = \Phi[f_1(x, y), f_2(x, y)]$? 为什么?

(2) 在整个区域 Ω 是否有 $f_3(x, y) = \psi[f_1(x, y), f_2(x, y)]$?

17.5.4 对下列函数组证明 $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = 0$, 并求 φ 使得 $f = \varphi(g)$:

$$(1) f = \sin(x^2 + y^2), g = \cos(x^2 + y^2);$$

$$(2) f = \ln y - \ln x, g = \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$(3) f = x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 1, g = e^{x-y}.$$

17.5.5 讨论函数相关性:

$$(1) \begin{cases} u = \frac{x-y}{x-z}, \\ v = \frac{y-z}{y-x}, \\ w = \frac{z-x}{z-y}, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} u = \frac{x}{1-x-y-z}, \\ v = \frac{y}{1-x-y-z}, \\ w = \frac{z}{1-x-y-z}. \end{cases}$$

17.5.6 设一元函数组

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

在区间 (a, b) 线性无关. 证明

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (x \in (a, b)).$$

17.5.7 设

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0); \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0), \\ x^2 & (x \leq 0). \end{cases}$$

(1) 求

$$w(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix};$$

(2) $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否线性相关?

(3) 此例说明什么?

17.5.8 设 $u = f(x, y), v = g(x, y)$ 在开区域 Ω 内有连续的偏导数, 满足

$$F(u, v) = F(f(x, y), g(x, y)) = 0,$$

其中 $F \in C^{(1)}$, 在任意点的邻域不恒为零. 求证:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0 \quad ((x, y) \in \Omega).$$

* * *

17.1 设 A 是 $m \times m$ 矩阵, I 为 m 阶单位矩阵, 考察矩阵序列

$$T_n = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!},$$

证明:

(1) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时对任意自然数 p 有

$$\|T_{n+p} - T_n\| < \varepsilon.$$

(2) 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 T_n 收敛于某矩阵, 记为 e^A .

17.2 设 $\Omega \subset R^m$ 是开区域, $f(x) \in C^{(1)}(\Omega, R^m)$, $\det Df(x) \neq 0$ ($x \in \Omega$). 求证: $f(\Omega)$ 是开区域.

17.3 设 $\Omega \subset R^2$ 是有界开区域, $\Omega \rightarrow R^2$ 的函数

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

满足: $1^\circ T \in C^{(1)}(\Omega)$, $2^\circ \det DT(x, y) \neq 0 ((x, y) \in \Omega)$.

(1) 若 $G \subset \Omega$ 是闭区域, 又 $T(x, y)$ 是 Ω 上的单叶函数, 求证: $T(G)$ 也是闭区域且 $T(\partial G) = \partial T(G)$.

(2) 若 T 是 Ω 上的单叶函数, 又 T 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 问 $T(\bar{\Omega})$ 是不是闭区域? 是否有

$$T(\partial \bar{\Omega}) = \partial T(\bar{\Omega}),$$

证明你的判断.

17.4 设 $x_0 \in R^3$, U_0 是 x_0 的一个邻域,

$$u(t, x) \in C^{(1)}([0, T_0 + \varepsilon_0] \times U_0, R^3),$$

其中 $\varepsilon_0 > 0$. 若 $u(T_0, x_0) = z_0$, Π 是过 z_0 , 以 n 为法向量的平面,

$\frac{\partial u(T_0, x_0)}{\partial t} \cdot n \neq 0$. 试证: 存在 x_0 的某邻域 $U_1 \subset U_0$ 和唯一函数

$T(x)$, 使得 $T(x) \in C^{(1)}(U_1, R^1)$, $T(x_0) = T_0$, 且 $u(T(x), x) \in \Pi(x \in U_1)$.

17.5 今有四个变量的方程组

$$Bx - \lambda x + N(x, \lambda) = 0,$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B 是 3×3 矩阵, λ 为实数, $N \in C^{(2)}$,

$$N(0, \lambda) = 0, D_x N(0, \lambda) = 0,$$

λ_0 是 B 的单特征值. 试问能否在 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 邻域从方程中解出三个属于 $C^{(1)}$ 的一元函数.

17.6 设 $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ 在区域 Ω 有连续偏导数. 求证: u, v 满足一元函数关系 $u = \varphi(v)$ 的充要条件是

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv 0.$$

第十八章 多元函数微分学的应用 ——几何应用与极值问题

曲线的表示法和它的切线

18.1.1 R^3 中曲线由 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 表示. 求曲线上相应于 $x = x_0$ 的点处的切线和法平面方程.

18.1.2 在指定点写出下列曲线的切线和法平面方程:

(1) $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$, 在点 $t = \frac{\pi}{4}$;

(2) $x = t - \cos t$, $y = 3 + \sin^2 t$, $z = 1 + \cos 3t$, 在点 $t = \frac{\pi}{2}$.

18.1.3 在曲线 $y = x^2$, $z = x^3$ 上求出一点, 使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

18.1.4 证明圆柱螺旋线

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$$

的切线与 z 轴的夹角为常数.

18.1.5 证明曲线 $x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = ae^t$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

18.1.6 设 $F(x, y) \in C^{(2)}(U(M_0))$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}$ 不同时为零, $F(x_0, y_0) = 0$. 求由 $F(x, y) = 0, y(x_0) = y_0$ (或 $x_0 = x(y_0)$) 确定的曲线在点 (x_0, y_0) 邻域的曲率.

18.1.7 设有一曲线 $f(r, \varphi) = 0$, 其中 r, φ 为极坐标, 又设 f'_r, f'_φ 不同时为零, 求其曲率公式.

18.1.8 在柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 上求一曲线, 使它通过 $(R, 0, 0)$, 且每点的切向量与 x 轴、 z 轴的夹角相等.

18.1.9 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上求一条曲线, 使其上每一点的法线与平面 $2x + 3y + 6z - 1 = 0$ 的夹角为 30° .

18.1.10 设有一圆锥, 底半径为 R , 高为 $h (h > R)$. 现锥面上有一曲线, 每一点的切线与 z 轴的夹角为 45° , 若曲线上任意一点在 Oxy 平面的投影的极坐标为 $(r(\theta), \theta)$, 见图 10.

(1) 求证:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{Rr}{\sqrt{h^2 - R^2}}$$

(2) 求曲线的参数方程.

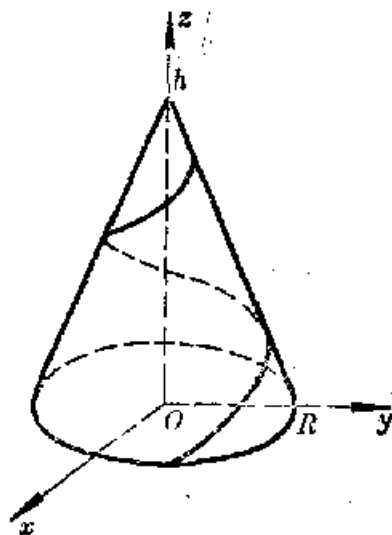


图 10

空间曲面的表示法和它的切平面

18.2.1 求出下列曲面在指定点的切平面和法线方程:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $P_0(3, 4, 12)$;

(2) $z = \arctg \frac{x}{y}$, $P_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $3x^2 + 2y^2 = 2z + 1$, $P_0(1, 1, 2)$;

(4) $z = y + \ln \frac{x}{z}$, $P_0(1, 1, 1)$.

18.2.2 求下列曲面在指定点的切平面方程:

(1) $x = a \cos \varphi \cos \theta$, $y = b \cos \varphi \sin \theta$, $z = c \sin \varphi$, 于 $M_0(\theta_0, \varphi_0)$ 处;

(2) $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, 于 $M_0(u_0, v_0)$ 处.

18.2.3 试证明: 函数 $F(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的梯度向量是函数 $F(x, y, z)$ 在点 P_0 的等量面的法向量. (假设 $F \in C^{(1)}$).

18.2.4 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 $F(x, y, z) = c$ 的非奇异点, $F \in C(U(P_0))$ 为 n 次齐次函数. 证明: 此曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$xF'_x(P_0) + yF'_y(P_0) + zF'_z(P_0) = n.$$

18.2.5 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的各切平面.

18.2.6 证明曲面 $z = xe^{\frac{x}{y}}$ 的每一切平面都通过原点.

18.2.7 确定正数 λ , 使曲面 $xyz = \lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在某点相切.

18.2.8 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与曲面 $bz = xy$ 的交角.

18.2.9 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点的法向量与 x 轴、 z 轴

成等角的点的轨迹.

18.2.10 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = x$ 的切平面, 使其垂直于平面 $x - y - z = 2$ 和 $x - y - \frac{1}{2}z = 2$.

18.2.11 证明: 曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段之和为常量.

18.2.12 证明: 曲面 $F(x - az, y - bz) = 0$ 的切平面与某一定直线平行, 其中 a, b 为常数.

18.2.13 证明: 曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 的切平面通过一个定点, 其中 a, b, c 为常数.

18.2.14 证明: 曲面 $ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的法向量与向量 (x_0, y_0, z_0) 及 (a, b, c) 共面.

18.2.15 证明: 下列三曲面

$$\frac{xy}{z} = u, \quad \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = v, \quad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = w$$

垂直相交于一点, 其中 u, v, w 为定值.

18.2.16 求下列曲线在给定点处的切线方程:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$, 于 $(1, -2, 1)$ 处;

(2) $x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10$, 于 $(1, 1, 3)$ 处;

(3) $z = x^2 + y^2, 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$, 于 $(1, 1, 2)$ 处.

18.2.17 求两曲面的交线

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

在 Oxy 平面上的投影曲线的切线方程.

简单极值问题

18.3.1 设 $x = (x_1, \dots, x_m)$, $f(x)$ 在 $a = (a_1, \dots, a_m)$ 取极小(大)

值, 并存在 $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2} (i=1, 2, \dots, m)$. 求证:

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2} \geq 0 (\leq 0).$$

18.3.2 设 $f(x, y)$ 在 Oxy 平面的闭圆域上连续, 其最小(大)值在边界上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 达到, 边界圆在 P_0 的内法向(即指向圆心的法线方向)为 n , 单位向量 l 与 n 成锐角, 又 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}$ 存在. 求证:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} \geq 0 (\leq 0).$$

18.3.3 对下列函数按定义判断 $(0, 0)$ 是不是它的稳定点? 是不是它的极值点?

(1) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 1$;

(2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(3) $f(x, y) = (x + y)^2 - y^2$.

这些例子说明了什么?

18.3.4 求下列函数的极大值点和极小值点:

(1) $f(x, y) = x^2(y - 1)^2$;

(2) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$;

(3) $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$;

(4) $f(x, y) = 3x^2y - x^4 - 2y^2$;

(5) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$;

(6) $f(x, y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x + y)$.

18.3.5 求下列函数的极大值点和极小值点:

(1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 6x + 2z$;

(2) $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x^2 - y^2 - z^2}$.

18.3.6 用隐函数微分法求隐函数 $z = z(x, y)$ 的极大值和极小值:

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 10 = 0;$$

$$(2) (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 3;$$

$$(3) x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0;$$

$$(4) z^2 + xyz - x^2 - xy^2 - 9 = 0.$$

18.3.7 设 $f(x, y) = 3x^2y - x^4 - 2y^2$. 证明: $(0, 0)$ 不是它的极值点, 但沿过 $(0, 0)$ 点的每条直线, $(0, 0)$ 都是它的极大点.

18.3.8 求证:

(1) $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ 在 R^2 有最小值, 无最大值, 其中 $A > 0, B^2 < AC$;

(2) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 在 $0 < x, y < +\infty$ 有最小值, 无最大值;

(3) $f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$ 在 R^3 有最大值和最小值, 其中 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

18.3.9 求下列函数在指定区域 Ω 上的最大值和最小值(若它们存在的话):

$$(1) f(x, y) = x - x^2 - y^2, \Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$(2) f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}, \text{ 其中 } a^2 + b^2 + c^2 > 0, \Omega = R^3.$$

18.3.10 作容积为 V 的开口长方形容器, 问尺寸怎样时, 用料最省.

18.3.11 要制作一个中间是圆柱, 两端为相等的正圆锥的空浮标, 它的体积是一定的, 要使所用材料最省, 应当怎样选择这个圆柱和圆锥的尺寸?

18.3.12 有一块铁片, 宽 $b = 24\text{cm}$, 要把它的两边折起做成一个槽, 使得容积最大, 求每边的倾角 α 和折起的宽度 x , 见图 11.

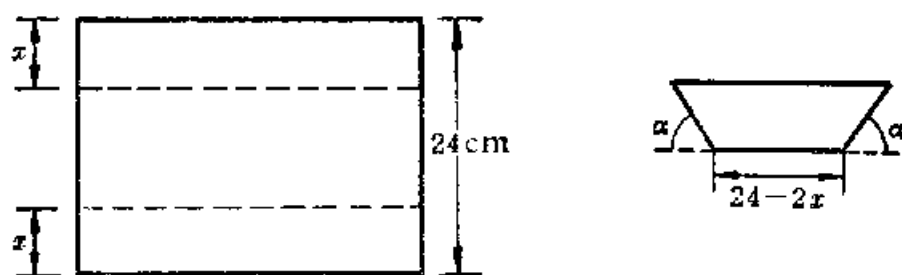


图 11

18.3.13 设有四个正数 x, y, z, t , 它们的积保持常数, 即 $xyzt = c^4$. 试证: 当 $x = y = z = t = c$ 时, 它们的和 $u = x + y + z + t$ 取最小值.

18.3.14 在半径为 R 的已知圆的一切内接三角形中, 求出其面积最大者.

提示: x, y, z 表示三角形各边所对的中心角, 三角形的面积可用 x, y, z, R 表示.

18.3.15 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内接长方体中, 求体积为最大的那个长方体.

18.3.16 设 $\bar{\Omega} \subset R^2$ 是有界闭区域, $u(x, y)$ 定义在 $\bar{\Omega}$ 上, 在 $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0,$$

其中 $c < 0$ 为常数. 求证:

- (1) u 在 $\bar{\Omega}$ 上的正最大值(负最小值)不能在 Ω 内部取到;
- (2) 又若 u 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, $u|_{\partial\Omega} = 0$, 则 $u \equiv 0$.

条件极值问题

18.4.1 设 $f(x, y), g(x, y) \in C^{(1)}$, (x_0, y_0) 是 $z = f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值点, $\text{grad}g(x_0, y_0) \neq 0$. 求证:

(1) $z=f(x, y)$ 过 (x_0, y_0) 的等高线 $f(x, y)=f(x_0, y_0)$ 与平面曲线 $\Gamma: g(x, y)=0$ 在 (x_0, y_0) 相切, 这里又设 $\text{grad} f(x_0, y_0) \neq 0$.

(2) 三维空间中, 曲面 $z=f(x, y)$ 与柱面 $g(x, y)=0$ 的交线在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 的切线与 Oxy 平面平行.

18.4.2 设 $f(x, y, z) \in C^{(1)}$, 曲线 Γ

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$$

是可微的, $P_0=(x_0, y_0, z_0)=(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 是 $f(x, y, z)$ 在曲线 Γ 上的极值点, $\text{grad} f(P_0) \neq 0$, $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq 0$. 求证: 等量面 $f(x, y, z)=f(x_0, y_0, z_0)$ 与曲线 Γ 在 P_0 相切.

18.4.3 设 $f(x) \in C(R^m)$. 求证: $f(x)$ 在条件 $(a, x)=1$, $x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$ 下存在最大值与最小值, 其中 $a=(a_1, \dots, a_m)$, $a_i > 0 (i=1, 2, \dots, m)$.

18.4.4 设 $f(x, y, z), g(x, y, z) \in C^{(1)}$, 令

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_0 g(x, y, z).$$

(1) 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 $F(x, y, z)$ 的极小(极大)点, 且 $g(x_0, y_0, z_0)=0$, 问 P_0 是不是 $f(x, y, z)$ 在条件 $g(x, y, z)=0$ 下的极小(极大)点?

(2) 设 P_0 是 F 的稳定点, $g(x_0, y_0, z_0)=0$. 若海色矩阵 $H_F(P_0)$ 是正定(负定)的, 求证 P_0 是 $f(x, y, z)$ 在条件 $g(x, y, z)=0$ 下的极小(极大)点; 若 $H_F(P_0)$ 是不定的, 能否断定 P_0 不是 $f(x, y, z)$ 在条件 $g(x, y, z)=0$ 下的极值点?

18.4.5 求下列条件极大值和条件极小值:

(1) $x^2 + y^2 = 1$, 求 $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ 的极值;

(2) $ax + by + cz = k$, 求 $f(x, y, z) = x^l y^m z^n$ 的极值, 其中 l, m, n 为正整数, a, b, c, k 为常数;

(3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$, $lx + my + nz = 0$, 求 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的极值;

(4) $lx + my + nz = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 求 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ 的极值.

18.4.6 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 求 $x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz$ 的最大值和最小值.

18.4.7 求函数 $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ 在条件 $x + y = l (l > 0, n \geq 1)$ 之下的极值, 并证明: 当 $a \geq 0, b \geq 0, n \geq 1$ 时

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

18.4.8 求 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ 在条件 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} (x_i > 0, a > 0)$ 之下的极值, 并证明: 当 $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时,

$$n \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)^{-1} \leq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

18.4.9 设 $x_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$. 证明:

(1) $p > 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^n x_k^p \geq n \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^p;$$

(2) $0 < p < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^n x_k^p \leq n \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^p.$$

18.4.10 求圆的外切三角形中面积最小者.

18.4.11 证明: 椭圆的内接三角形中, 面积最大的三角形的一顶点的椭圆法线必与三角形的该顶点的对边垂直; 并求椭圆中

面积最大的内接三角形.

18.4.12 长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成一个正方形, 另一段围成一个圆. 这两段的长各为多少时, 使它们所围正方形和圆形面积之和最大.

18.4.13 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y=1$ 间的最短距离.

18.4.14 为了使渠道不致漏水, 在渠道表面砌一层水泥. 根据流量的大小, 其截面积就确定了. 假定要修的渠道是直的, 其横断面是一等腰梯形 (见图 12), 问腰和底各为多少时水泥用量为最少.



图 12

18.4.15 凸四边形各边长分别为 a, b, c, d , 求最大面积者.

18.4.16 求一点 O , 使与一个凸四边形的四顶点距离之和为最小.

18.4.17 证明椭球面 $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=1$ 的最大轴长 l 为如下方程之最大实根:

$$\begin{vmatrix} a-\frac{1}{l^2} & d & e \\ d & b-\frac{1}{l^2} & f \\ e & f & c-\frac{1}{l^2} \end{vmatrix} = 0.$$

18.4.18 设 $f(x, y) \in C^{(1)}(\Omega)$, 在 Ω 内有以 (ξ, η) 为中心的闭圆 S_R , $(x_0, y_0) \in \partial S_R$, 它是 $f(x, y)$ 在 ∂S_R 上的最小值点. $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, n 是 ∂S_R 上点 (x_0, y_0) 的单位外法向. 求证:

(1) 若 $\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$, 则对任何单位向量 l 都有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = 0.$$

(2) 若 $\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{(x_0, y_0)} < 0$, 则对任何单位向量 l , 夹角 $\langle l, n \rangle < \frac{\pi}{2}$ 时

都有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} < 0.$$

最小二乘法

18.5.1 已知 x, y 满足线性关系

$$y = ax + b,$$

根据测得 n 对数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用最小二乘法近似地求出 a 和 b .

18.5.2 在平面上已知 n 个点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 设直线 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ 与已知点的偏差(距离)的平方和为最小. 求证:

$$p = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2(\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy})}{[\overline{x^2} - (\bar{x})^2][\overline{y^2} - (\bar{y})^2]},$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \neq 0,$$

$$\overline{y^2} - (\bar{y})^2 \neq 0.$$

18.5.3 已知 $u = Ax + By + Cz$, 现测得一组数据 $(x_i, y_i, z_i, u_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用最小二乘法求系数 A, B, C 所满足的三元一次方程组.

18.5.4 设有一经验函数 $f = Ke^{-\alpha x}$, 其中 K, α 为未知常数,

又设已得数据如下表:

x	0	1	2	3	4
f	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

- (1) 试由最小二乘法导出 K, α 满足的非线性方程组;
- (2) 试由前两组数据定出 $K = K_0, \alpha = \alpha_0$;
- (3) 对给定的 x, f 作为 K, α 的函数, 求它在 $K = K_0, \alpha = \alpha_0$ 处的一阶近似公式;
- (4) 以求得的一阶近似公式代替 f , 由所得数据, 利用最小二乘法求出 K, α 满足的线性方程组.

* * *

18.1 经过空间曲线 Γ 上任意三点之平面当此三点无限趋于 Γ 上的 P_0 点时的极限平面称为 Γ 在 P_0 点的密接面. 设有空间曲线 Γ

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t),$$

其中 $f, g, h \in C^{(2)}$. 证明: $t = t_0$ 处 Γ 的密接面方程为

$$\begin{vmatrix} x - f(t_0) & f'(t_0) & f''(t_0) \\ y - g(t_0) & g'(t_0) & g''(t_0) \\ z - h(t_0) & h'(t_0) & h''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

18.2 设

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

用求条件极值的方法证明:

$$|A| \leq \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^3 z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

18.3 用求条件极值的方法证明不等式:

$$\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中, $p > 0, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

18.4 设 $f(x) \in C^{(1)}(R^m, R^m)$, 存在常数 $\alpha > 0$, 使得对任意 $x, y \in R^m$ 有

$$|f(x) - f(y)| \geq \alpha |x - y|.$$

证明:

(1) $\det Df(x) \neq 0, x \in R^m$;

(2) $\psi(x) = |f(x) - y|^2 = (f(x) - y, f(x) - y)$ 在 R^m 存在最小值, 无最大值;

(3) $f(R^m) = R^m$.

18.5 记

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x},$$

其中 a 为常数,

$$\Omega = \{(x, t) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\},$$

$$\Gamma = \{(x, t) | x = 0, 1, 0 \leq t < T; \text{或 } 0 \leq x \leq 1, t = 0\}.$$

(1) 设 $u(x, t)$ 满足

$$Lu < 0 \quad (0 < x < l, 0 < t \leq T),$$

且 u 在 Ω 上的最大值在某点 (x_0, t_0) 取到, 试证 $(x_0, t_0) \in \Gamma$;

(2) 设 $u(x, t), w(x, t) \in C(\Omega)$, 满足

$$Lu = 0 \quad (0 < x < l, 0 < t \leq T),$$

$$w > 0, Lw < 0 \quad (0 < x < l, 0 < t \leq T).$$

求证: 对任意正数 ε , 有

$$\max_{\Omega} u(x, t) \leq \max_{\Gamma} (u + \varepsilon w);$$

(3) 设 $u(x, t) \in C(\Omega)$, 满足

$$Lu=0 \quad (0<x<l, 0<t\leq T).$$

试证明:

$$\max_{\bar{\Omega}} u(x, t) = \max_{\Gamma} u(x, t).$$

18.6 设 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是正定二次型, $u(x)\in C(\bar{\Omega}, R^1)$, Ω 是

R^n 中的有界开区域. 若 $u\in C^{(2)}(\Omega)$, u 在 $\bar{\Omega}$ 的最小值于 $x_0\in\Omega$ 取到, 求证

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=x_0} \geq 0.$$

第十九章 含参变量的积分

含参变量的定积分

19.1.1 设 $\bar{D}$ 是 R^m 中的有界闭区域, $E=\bar{D}\times[\alpha, \beta]$, $f(x, t)\in C(E)$,

$$I(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt.$$

求证: $I(x)\in C(E)$.

19.1.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 黎曼可积, $\varphi(x, y)\in C^{(k)}(D)$, 其中 $D=[a, b]\times(\alpha, \beta)$, 又设

$$g(y)=\int_a^b f(x)\varphi(x, y) dx.$$

求证: $g(y)\in C^{(k)}(\alpha, \beta)$ 且

$$g^{(n)}(y)=\int_a^b f(x)\frac{\partial^n \varphi(x, y)}{\partial y^n} dx \quad (n=1, 2, \dots, k).$$

19.1.3 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dy; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos xy dy;$$

$$(3) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}.$$

19.1.4 设 $f(x)$ 为连续函数,

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \left[\int_0^h f(x+\xi+\eta) d\eta \right] d\xi.$$

求 $F''(x)$.

19.1.5 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$. 求 $F^{(n)}(x)$.

19.1.6 设 $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$, $F(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$,

$$u = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy.$$

求证: 当 $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ 时, $u(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 连续且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x).$$

19.1.7 求 $F'(x)$:

$$(1) F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} dy;$$

$$(2) F(x) = \int_{a+x}^{b+x} \frac{\sin xy}{y} dy;$$

$$(3) F(x) = \int_0^x \left[\int_{t^2}^{x^2} f(t, s) ds \right] dt.$$

19.1.8 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, a_n, b_n 为其富氏系数, A_n, B_n 是卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

的富氏系数. 求证:

$$A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2, B_n = 0.$$

19.1.9 设

$$F(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

求证: $F(x) \equiv 2\pi$.

19.1.10 设 $F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$, 问是否成立:

$$F'(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} dx.$$

19.1.11 证明:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

19.1.12 设 $f(x, y) \in C^{(n)} (n \geq 1)$,

$$g(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{r} [f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)] & (r \neq 0), \\ \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} \sin \theta & (r = 0). \end{cases}$$

求证: $g(r, \theta) \in C^{(n-1)}$.

19.1.13 设 U 是 R^m 中原点的一个邻域, $g(x) \in C^{(2)}(U)$, $g(0) = 0$. 求证:

$$g(x) = \sum_{i=1}^m x_i f_i(x),$$

其中 $f_i(x) \in C^{(1)}(U)$, $f_i(0) = \frac{\partial g(0)}{\partial x_i}$.

含参变量的广义积分

19.3.1 求出下列函数的定义域:

$$(1) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{1+y^2} dy;$$

$$(2) F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t^y}{t^x} dt;$$

$$(3) \quad F(x) = \int_0^2 \frac{dt}{|\ln t|^x}.$$

19.3.2 证明下列积分在所给定的区间内一致收敛:

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} dy \quad (x \geq a > 0);$$

$$(2) \quad \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \quad (a \leq \alpha \leq b);$$

$$(3) \quad \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (p > 0, \alpha \geq 0);$$

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0);$$

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \quad (\alpha \geq 0).$$

19.3.3 设 $t > 0$ 时 $f(t)$ 连续, $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 当 $\lambda = a, \lambda = b$

时皆收敛, 且 $a < b$. 求证: $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 一致收敛.

19.3.4 叙述 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dy$ 对 $x \in X$ 的不一致收敛原理.

19.3.5 设 $\int_0^{+\infty} f(x, y) dy$ 对 $x \in X$ 收敛. 设有 X 的聚点 x_0 , 对任意 $A > 0$,

$$\lim_{x \in X, x \rightarrow x_0} \int_A^{+\infty} f(x, y) dy = l(A)$$

存在, 且对一切 $A > 0$, $|l(A)|$ 所成集合有正下界. 证明 $\int_0^{+\infty} f(x, y) dy$ 对 $x \in X$ 不一致收敛.

19.3.6 证明下列积分在所给定区间内不一致收敛:

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty);$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{x^n} \sin \frac{1}{x} dx \quad (0 < n < 2);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin y dy \quad (0 < x < +\infty).$$

19.3.7 讨论下列积分在指定区间内的一致收敛性:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \quad (1^\circ a < \alpha < b, \quad 2^\circ -\infty < \alpha < +\infty);$$

$$(2) \int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx \quad (1^\circ p \geq p_0 > 0, \quad 2^\circ p > 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \quad (1^\circ \alpha \in [a, b], 0 \notin [a, b], \quad 2^\circ \alpha \in [a, b], \\ 0 \in [a, b]);$$

$$(4) \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

19.3.8 讨论下列函数在指定区间上的连续性:

$$(1) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) F(x) = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y^x (\pi - y)^{2-x}} dy, \quad x \in (0, 2);$$

$$(3) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1 + y^x} dy, \quad x > 3.$$

19.3.9 设对任意 $\beta > \alpha$, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y), \text{ 对 } y \in [\alpha, \beta] \text{ 一致成立,}$$

其中 $x_0 \in [a, b]$, 又

$$|f(x, y)| \leq F(y), \quad (x \in [a, b], y \geq \alpha)$$

$$\int_\alpha^{+\infty} F(y) dy < +\infty.$$

按极限定义证明

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in [a, b]}} \int_\alpha^{+\infty} f(x, y) dy = \int_\alpha^{+\infty} f(x_0, y) dy.$$

19.3.10 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可积, 除 $+\infty$ 外只有 $x=0$ 为瑕点. 求证

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

19.3.11 设 $f(x, y) > 0$, 又设对一切有限值 $b > a, \beta > \alpha$, 有

$$\int_a^b dx \int_\alpha^{+\infty} f(x, y) dy = \int_\alpha^{+\infty} dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^\beta f(x, y) dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

求证下面的等式

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} f(x, y) dy = \int_\alpha^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在任意一边的积分收敛时成立.

19.3.12 设 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 存在. 求证:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ux dx$$

在 $-\infty < u < +\infty$ 上有界且一致连续.

19.3.13 设 $f(x, y)$ 满足:

1° $\frac{d}{dx} \int_\alpha^\beta f(x, y) dy = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$ 对 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 及一切

$\beta > \alpha$ 成立, 其中 $\delta > 0$;

2° $\int_\alpha^{+\infty} f(x_0, y) dy$ 收敛;

3° $\int_\alpha^{+\infty} f'_x(x, y) dy$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 一致收敛.

求证: $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时

$$\frac{d}{dx} \int_\alpha^{+\infty} f(x, y) dy = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

计算含参变量积分的几个例子

19.4.1 利用已知积分值

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

与积分运算法则计算下列积分:

- (1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx;$ (2) $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin y \cos yx}{y} dy;$
 (3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx;$ (4) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx \quad (\alpha > 0);$
 (5) $\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx \quad (a > 0);$
 (6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})} dx \quad (a > 0).$

19.4.2 利用对参数的微分法计算下列积分:

- (1) $I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \quad (n \text{ 为自然数}, a > 0);$
 (2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$
 (3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$
 (4) $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin bx dx \quad (\alpha > 0).$

19.4.3 利用对参数的积分法计算下列积分:

- (1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0);$
 (2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

19.4.4 从已知积分出发, 利用对参数的微分法求下列积分:

- (1) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx \quad (\alpha > 0, n \text{ 为自然数});$
 (2) $\int_0^1 x^{\alpha-1} \ln^n x dx \quad (\alpha > 0, n \text{ 为自然数}).$

19.4.5 从等式

$$\frac{1}{\alpha^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-t(x^2 + \alpha^2)} dt$$

出发, 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2 + \alpha^2} dx \quad (\alpha > 0); \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{x^2 + \alpha^2} dx \quad (\alpha > 0).$$

19.4.6 求下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx \quad (a > 1);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx \quad (\alpha \geq 0);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} J_0(x) dx, \text{ 其中}$$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

19.4.7 求下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t} \cos t dt;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

欧拉积分—— β 函数与 Γ 函数

19.5.1 求下列积分的存在域并用欧拉积分表示:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{2+x^n} dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}};$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx;$$

$$(5) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx; \quad (6) \int_0^1 x^m \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{n-1} dx;$$

$$(7) \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (\alpha > 0).$$

19.5.2 利用欧拉积分计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}; \quad (2) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \sqrt{x^3(1-\sqrt{x})} dx; \quad (4) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0);$$

$$(5) \int_0^1 \frac{x^n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (n \text{ 为自然数});$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx; \quad (7) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$(8) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 为自然数}); \quad (9) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$$

19.5.3 证明:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n > 0);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1.$$

19.5.4 证明

$$\int_{-1}^1 (1+x)^p (1-x)^q dx = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1) \\ (p > -1, \quad q > -1).$$

19.5.5 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right),$$

其中 $\alpha > 0$. 由此计算 α 为正整数时的积分值.

*

*

*

19.1 设 $f(x) \in C^{(\infty)}$, $x \in R^m$. 证明:

$$f(x) = Df(a) \cdot (x-a) + \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x)(x_i-a_i)(x_j-a_j),$$

其中 $g_{ij} \in C^{(\infty)}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $a = (a_1, \dots, a_m)$.

19.2 设 $u(x, t)$ 满足

$$1^\circ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0),$$

$$2^\circ u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$3^\circ u(x, t) \in C^{(2)}([0, l] \times [0, +\infty)).$$

求证: $t \geq 0$ 时

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

为常数.

19.3 设 $f(x) \in C^{(p)}(-\infty, +\infty)$, 满足:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(q-1)}(a) = 0 \quad (1 \leq q \leq p-1).$$

定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-a)^p} & (x \neq a), \\ \frac{1}{q!} f^{(q)}(a) & (x = a). \end{cases}$$

证明: $g(x) \in C^{(p-q)}(-\infty, +\infty)$.

19.4 设 $f(x) \in C[-1, 1]$. 求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = \pi f(0).$$

19.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 有界,

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi.$$

求证:

(1) $u(x, y)$ 在 $-\infty < x < +\infty, y > 0$ 上连续;

(2) 在 $-\infty < x < +\infty, y > 0$ 上 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 连续且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$(3) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = 1;$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0+}} u(x, y) = f(x_0) \quad (x_0 \in (-\infty, +\infty)).$$

19.6 设 $\varphi(x) \in C(-\infty, +\infty)$ 且有界,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (a > 0).$$

求证:

(1) 当 $-\infty < x < +\infty, t > 0$ 时 $u(x, t)$ 有界且任意次可微;

(2) 当 $-\infty < x < +\infty, t > 0$ 时,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

(3) 当 $-\infty < x < +\infty, t > 0$ 时,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2} d\eta;$$

$$(4) \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ x \rightarrow x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0) \quad (x_0 \in (-\infty, +\infty));$$

$$(5) \text{若 } \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (t > 0);$$

$$(6) \text{若 } \varphi'(x) \text{ 连续、有界, 则 } \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ x \rightarrow x_0}} \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi'(x_0)$$

$$(x_0 \in (-\infty, +\infty)).$$

第二十章 重 积 分

R^m 空间图形的若当测度

20.2.1 试求 R^2 中点集

$E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \text{ 与 } y \text{ 至少有一无理数}\}$ 的内
容积和外容积. 问 E 是不是可测图形?

20.2.2 设 A, B, C 是 R^m 的可测图形, 则

$$(1) V(A \setminus B) = V(A) - V(A \cap B),$$

$$(2) V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B),$$

$$(3) V(A \cup B \cup C) = V(A) + V(B) + V(C) - V(A \cap B) \\ - V(A \cap C) - V(B \cap C) + V(A \cap B \cap C).$$

20.2.3 举例说明 R^m 中两个点集 E_1 和 E_2 都不是可测图形,
但 $E_1 \cup E_2$ 和 $E_1 \cap E_2$ 都是可测图形. 问是否还可能有 $E_1 \setminus E_2$ 也为
可测图形?

20.2.4 设有一点集 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$. 如果把
 D 看成 R^3 空间的点集, 它的容积 $V^{(3)}(D) = ?$ 如果把 D 看成 R^2 的
点集, 它的容积 $V^{(2)}(D) = ?$ 这是否有矛盾? 试加以说明.

20.2.5 A 为 R^m 中一可测图形, 证明 A° 和 $\bar{A}$ 为可测图形,
而且 $V(A^\circ) = V(\bar{A}) = V(A)$.

20.2.6 Ω 是 R^m 中的点集. 已知 $\overline{\Omega}$ 是可测图形, 问 Ω 是否
一定是可测图形? 如果你的答案是肯定的, 证明你的结论; 否则,
举出反例说明.

20.2.7 举例说明, R^m 中两个点集 S_1 和 S_2 都不是可测图
形, 但 $S_1 \setminus S_2$ 为可测图形.

20.2.8 设 A 和 B 是 R^m 的可测图形, 而且 B 的容积为零, 则 $V(A \cup B) = V(A \setminus B) = V(A)$.

20.2.9 设 A, B 为 R^m 的两个可测图形, 试给出

$$V(A \setminus B) = V(A) - V(B)$$

成立的充分必要条件.

在 R^n 上的黎曼积分

20.3.1 在 R^2 的区域 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 上给定一函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x, y \text{ 都是有理数;} \\ 0, & \text{当 } x, y \text{ 至少有一个是无理数.} \end{cases}$$

问 $f(x, y)$ 是否在 D 可积?

20.3.2 设 Ω 和 S 是 R^3 中的可测图形,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{当 } (x, y, z) \in S; \\ 0, & \text{当 } (x, y, z) \in \Omega \setminus S. \end{cases}$$

问 $f(x, y, z)$ 是否在 Ω 上可积?

20.3.3 设 $f: A \subset R^m \rightarrow R^1$, 在 A 有界、可积. 又设 $B \subset A$ 为一可测图形, 证明 f 的限制 $f|_B$ 在 B 可积.

20.3.4 在 R^2 的点集

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 0, 1 \leq y \leq 2\}$$

上给定一函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{1}{2-y}, & \text{当 } x = 0, 1 < y < 2; \\ 0, & \text{当 } x = 0, y = 2. \end{cases}$$

证明: (1) D 是 R^2 的可测图形; (2) $f(x, y)$ 在 D 无界; (3) $f(x, y)$ 在 D 可积.

20.3.5 设 R^m 中的开集 A 为可测图形, $f: A \rightarrow R^1$, f 在 A 上连续, 不恒为零, 而且 $f(x) \geq 0, x \in A$. 证明 $\int_A f dV > 0$. 如果 A 不是开集, 上述结论是否仍正确? 举例说明.

20.3.6 设 R^m 中的开区域 Ω 是可测图形, $f: \overline{\Omega} \rightarrow R^1$, f 在 $\overline{\Omega}$ 上连续. 如果对于任一可测图形 $B \subset \Omega$, 都有 $\int_B f dV = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0, x \in \overline{\Omega}$.

20.3.7 题 6 中去掉 Ω 为开区域的条件, 结论是否仍成立? 举例说明.

20.3.8 设 R^m 中的开区域 Ω 是一可测图形, f 在 $\overline{\Omega}$ 上连续. 如果对任何一个在 $\overline{\Omega}$ 上连续而且在 $\partial\Omega$ 上之值为零的函数 $\eta(x)$, 都有 $\int_{\Omega} f \eta dV = 0$, 则 $f(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上恒为零. 如果去掉 Ω 为开区域的条件, 结论是否仍正确?

20.3.9 设 A, B 为 R^m 的可测图形, $A \cap B$ 的容积为零, 又设 f 在 $A \cup B$ 上可积. 证明

$$\int_{A \cup B} f dV = \int_A f dV + \int_B f dV.$$

20.3.10 设定义在可测图形 $\Omega \subset R^m$ 上的两个函数 f, g 有界可积, 而且 $g(x)$ 在 Ω 之值非负. 令

$$m = \inf_{x \in \Omega} \{f(x)\}, \quad M = \sup_{x \in \Omega} \{f(x)\}.$$

证明: (1) $F(t) = \int_{\Omega} (f(x) - t)g(x)dV$ 是 $[m, M]$ 上的连续函数;
(2) $F(t)$ 在 $[m, M]$ 上至少有一点之值为零; (3) 利用(2)的结论, 证明存在 $\mu \in [m, M]$, 使得 $\int_{\Omega} fg dV = \mu \int_{\Omega} g dV$.

化重积分为累次积分

20.4.1 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, $g(y)$ 在 $[c, d]$ 可积.

证明: 二元函数 $F(x, y) = f(x)g(y)$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 而且

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

20.4.2 设一元函数 $f_i(x_i)$ 在 $[a_i, b_i]$ 上可积, $i = 1, 2, \dots, n$. 证明: n 元函数 $F(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ 在 $\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 上可积, 而且

$$\int_{\Omega} F dV = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f_i(x_i) dx_i.$$

20.4.3 设 $\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, f 在 Ω 上连续. 定义 $\Omega_x = [a_1, x_1] \times \cdots \times [a_n, x_n]$, 其中 $x_i \in [a_i, b_i]$. 令

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Omega_x} f dV.$$

证明: $F(x_1, \dots, x_n)$ 在 Ω° 有连续一阶偏导数, 并求出 $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$).

20.4.4 设在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上定义的二元函数 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数.

(1) 证明
$$\iint_D f''_{xy}(x, y) dx dy = \iint_D f''_{yx}(x, y) dx dy;$$

(2) 利用(1)证明 $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$, $(x, y) \in D$.

20.4.5 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 在 $D = [a, b] \times [a, b]$ 上定义 $F(x, y) = [f(x) - f(y)]^2$.

(1) 将重积分 $\iint_D F(x, y) dx dy$ 化为累次积分;

(2) 证明

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

20.4.6 对下列区域依两种不同顺序将二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y)$

$dx dy$ 化为累次积分:

(1) Ω 是以 $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$ 和 $A_3(a_3, b_3)$ ($a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$) 为顶点的三角形;

(2) Ω 是以 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 1)$ 为顶点的三角形;

(3) Ω 是以 $A(a, 0)$, $B(2a, 2a)$, $C(2a, 4a)$ 和 $D(a, 2a)$ 为顶点的四边形 ($a > 0$);

(4) Ω 是圆域 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$;

(5) Ω 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 2x$;

(6) Ω 是环域 $R_1^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R_2^2$ ($R_2 > R_1$);

(7) Ω 是由 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0$) 围成的区域;

(8) Ω 是由 $y = x^3$, $y = 2x^3$, $y = 1$ 和 $y = 2$ 围成的区域;

(9) Ω 是由 $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $x = -1$ 和 $x = 1$ 围成的区域.

20.4.7 在下列积分中改变积分的顺序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{3-y} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy;$$

$$(6) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-a}} f(x, y) dy \quad (0 < a < 1);$$

$$(7) \int_0^{\pi} dy \int_{\sin \frac{y}{2}}^{\sin y} f(x, y) dx.$$

20.4.8 证明 Dirichlet 公式

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0).$$

20.4.9 设一元函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积, 证明

$$\int_0^1 dx \int_x^1 g(t) dt = \int_0^1 t g(t) dt.$$

20.4.10 设 m 和 n 是正整数, 且至少有一个是奇数, 证明

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} x^m y^n dx dy = 0.$$

20.4.11 设 m 和 n 是正整数, 且都是偶数, 证明

$$\iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^m y^n dx dy = 4 \iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^m y^n dx dy.$$

20.4.12 计算下列二重积分:

(1) Ω 是由 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), $x = \frac{p}{2}$ 围成的区域, 计算

$$\iint_{\Omega} x^m y^k dx dy \quad (m, k > 0);$$

(2) Ω 由 $y = 0$, $y = \sin(x^2)$, $x = 0$ 和 $x = \sqrt{\pi}$ 围成, 计算

$$\iint_{\Omega} x dx dy;$$

(3) $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 2 + x, x \leq 2\}$, 计算

$$\iint_{\Omega} x^2 y^2 dx dy;$$

(4) Ω 由 $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 0$ 围成, 计算 $\iint_{\Omega} (x^2 + 3xy^2) dx dy$;

(5) Ω 由 $y = e^x$, $y = 1$, $x = 0$ 及 $x = 1$ 围成, 计算

$$\iint_{\Omega} (x + y) dx dy;$$

(6) Ω 是以 $(2, 2)$, $(2, 3)$ 和 $(3, 1)$ 为顶点的三角形, 计算

$$\iint_{\Omega} e^{x+y} dx dy;$$

(7) Ω 是以 $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ 和 $(4, 3)$ 为顶点的四边形, 计算 $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$;

(8) Ω 由 $y = x^2$, $y = 4x$ 和 $y = 4$ 围成, 计算

$$\iiint_{\Omega} (\sin nx) dx dy.$$

20.4.13 设 $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$, 定义如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = \frac{p_1}{q_1}, y = \frac{p_2}{q_2} \text{ (有理数), 且 } q_1 \neq q_2, \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases}$$

其中 p_1 与 q_1 , p_2 与 q_2 没有公因子. 证明: $f(x, y)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上不可积, 但两个二次积分都存在.

20.4.14 计算下列三重积分:

(1) $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$;

(2) Ω 由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 围成的位于第一卦限的有界区域, 计算 $\iiint_{\Omega} x^3 y z dx dy dz$;

(3) Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 2$ 围成, 计算

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz;$$

(4) Ω 由曲面 $x^2 = z^2 + y^2$, $x = 2$, $x = 4$ 围成, 计算

$$\iiint_{\Omega} (1 + x^4) dx dy dz;$$

(5) Ω 由 $z=16(x^2+y^2)$, $z=4(x^2+y^2)$, $z=64$ 围成, 计算

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dx dy dz.$$

20.4.15 改变下列三重积分化为累次积分的顺序:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz;$$

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz;$$

$$(4) \int_{-b}^b dz \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} dy \int_0^{\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}} f(x, y, z) dx;$$

$$(5) \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dz \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} f(x, y, z) dy;$$

$$(6) \int_0^1 dy \int_{-y}^y dz \int_{-\sqrt{y^2-z^2}}^{\sqrt{y^2-z^2}} f(x, y, z) dx.$$

20.4.16 平面区域 D 的面积 A 由公式

$$A = \int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

给出, 问 D 由哪些曲线围成?

20.4.17 空间一立体 Ω 的体积由公式

$$V(\Omega) = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz$$

给出, 问 Ω 由哪些曲面围成?

20.4.18 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成的区域.

证明:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-c}^c \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz,$$

其中

$$D_z = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1 \right\}.$$

20.4.19 求下列立体 Ω 的体积:

- (1) Ω 由曲面 $z = xy$, $x + y + z = 1$ 和 $z = a (a > 0)$ 围成;
 (2) Ω 由 $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{\pi}{2}$ 和 $|x - y| \leq \frac{\pi}{2}$ 围成.

20.4.20 设 $f(x, y, z) = \frac{\partial^3 F(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}$ 在

$$D = [a, b] \times [c, d] \times [h, k]$$

上连续. 求 $I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, 并证明 $I \leq 4(M - m)$, 其中

M, m 分别是 $F(x, y, z)$ 在 D 之最大值和最小值.

20.4.21 证明: 若 $a > 0, b > 0$, 则有

$$(1) \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T dx \int_a^b e^{-xy} dy = \ln \frac{b}{a};$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

20.4.22 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 连续可微, 而且 $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ 收敛. 证

明: 当 $a > 0, b > 0$ 时, 有

$$(1) \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T dx \int_b^a f'(xy) dy = f(0) \ln \frac{b}{a};$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

重积分的变量替换

20.5.1 证明变换 $T: y_1 = x_1, y_2 = x_2 + \varphi_1(x_1), y_3 = x_3 +$

$\varphi_2(x_1, x_2)$ 是正则变换, 其中 φ_1 与 φ_2 有连续的一阶偏导数.

20.5.2 已知变换 $T: y_1 = x_1^2 - x_2^2, y_2 = 2x_1x_2$. 问此变换是否是 R^2 中的正则变换? 证明 T 是 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 的正则变换.

20.5.3 已知变换 $T: u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$.

(1) 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\pi\}$, 求 $T(D)$.

(2) 计算 $\iint_D |\det DT(x, y)| dx dy$ 和 $\iint_{T(D)} du dv$, 问两者是否相等?

(3) 证明: $\det DT(x, y)$ 在 R^2 为正. (2) 的结论说明了什么问题.

20.5.4 已知变换 $T: x = u - \frac{1}{4}(u+v)^2, y = \frac{1}{2}(u+v)$. 问变换 T 是不是 uv 平面上的正则变换? 设 B 是 xy 平面上由曲线 $x = -y^2, x = 2y - y^2$ 和 $x = 2 - y^2 - 2y$ 围成的区域, 求 $T^{-1}(B)$. 计算 $\iint_B x dx dy$ 和 $\iint_{T^{-1}(B)} x(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$, 问两者是否相等?

20.5.5 设变换 $T: \xi_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n, i = 1, \cdots, n$, 其中 $\det(a_{ij}) \neq 0$. 证明 T 是 R^n 空间的正则变换. 如果 Ω 是由超平面 $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i (h_i > 0, i = 1, \cdots, n)$ 围成的 $2n$ 面体, 问 $T(\Omega) = ?$

20.5.6 证明 R^n 中由 n 个向量 $a_1, \cdots, a_n$ 生成的平行多面体的体积为 $|\det(A_{ij})|^{\frac{1}{2}}$, 其中 A_{ij} 是 a_i 与 a_j 的内积 $a_i \cdot a_j$.

20.5.7 设 $f: A \subset R^m \rightarrow R^m$ 是 $C^{(1)}$ 映射, A 为开集. 又设 E 是 A° 内的容积为零的点集. 证明 $f(E)$ 的容积为零.

20.5.8 设 $A \subset R^m$ 是开集, $g: A \rightarrow B \subset R^m, g$ 是 $C^{(1)}$ 映射. 在此假定下, A 中任一可测图形 D 的像 $g(D)$ 也是可测图形. 如果 $V(D) = V(g(D))$ 对 A 中任一可测图形 D 成立, 则称 g 是保容积映

射, 假定 g 是一一映射, 且 $\det Dg(x) \neq 0 (x \in A)$, 证明 g 是保容积映射的充要条件是 $|\det Dg(x)| = 1, \forall x \in A$.

20.5.9 证明变换 $x_1 = u_1, x_2 = u_1 + u_2, x_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, x_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 是保容积映射.

20.5.10 设 $S \subset R^n$ 为一可测图形. 令

$$R = \{(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S\} \quad (t > 0).$$

证明 R 是一可测图形, 并且 $V(R) = t^n V(S)$.

20.5.11 作极坐标变换, 计算下列积分:

(1) Ω 由双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0)$ 围成,

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy;$$

(2) Ω 由阿基米德螺线 $r = \theta$ 和半射线 $\theta = \pi$ 围成, $\iint_{\Omega} x dx dy$;

(3) Ω 由对数螺线 $r = e^{\theta}$ 和半射线 $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 围成,

$$\iint_{\Omega} xy dx dy.$$

20.5.12 在下列积分中, 作极坐标变换, 并用两种不同的顺序化为对 r 和 θ 的累次积分:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

(1) $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(2) Ω 由 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 围成;

(3) Ω 由 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ 和 $y = 1 - x$ 围成;

(4) Ω 由 $y = x^2, y = \sqrt{3}x^2, x = 1$ 围成.

20.5.13 作极坐标变换, 将下列二重积分化为一重积分:

$$(1) \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy;$$

$$(2) \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy, \Omega = \{(x, y) \mid |y| \leq |x|, |x| \leq 1\};$$

$$(3) \iint_{\Omega} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy, \Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4x + 2y - 4\}.$$

20.5.14 利用二重积分, 作极坐标变换, 求由下列曲面围成立体的体积:

$$(1) z = xy, x^2 + y^2 = a^2, z = 0;$$

$$(2) z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0;$$

$$(3) x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq |x|a \quad (a > 0);$$

$$(4) x^2 + y^2 - z = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0.$$

20.5.15 利用二重积分求下列曲面围成立体的体积:

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0);$$

$$(2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0;$$

$$(3) z^2 = xy, x - y = a, x + y = b, (0 < a < b);$$

$$(4) z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, xy = a^2, xy = 2a^2, y = b^2x, y = 2b^2x, z = 0$$

$$(0 < a < b);$$

$$(5) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, z = 0;$$

$$(6) \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (n > 0);$$

$$(7) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, x = 1, y = 0, z = 0 (0 < n, 0 < m).$$

以上各题中的 a, b 和 c 均为正数.

20.5.16 作适当的变量替换, 求下列积分:

$$(1) \Omega \text{ 由 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 围成, } \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy;$$

(2) Ω 是由 $x^4 + y^4 = 1$ 围成的区域, $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$;

(3) Ω 由 $x^2 + y^2 = 1$ 围成, $\iint_{\Omega} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$;

(4) Ω 由 $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ 围成, $\iint_{\Omega} \left| \frac{ax+by}{\sqrt{2}} - a^2x^2 - b^2y^2 \right| dx dy$;

(5) Ω 由 $y = 4x^2, y = 9x^2, x = 4y^2, x = 9y^2$ 围成,

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy;$$

(6) Ω 由 $xy = 2, xy = 4, y = x, y = 2x$ 围成,

$$\iint_{\Omega} xy dx dy.$$

以上各题中 a, b 均为正数.

20.5.17 设 $f(x, y)$ 在单位圆上有连续的偏导数, 且在边界上取值为零. 求证

$$f(0,0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \iint_{\epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy.$$

20.5.18 给定积分 $I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$, 作正则变

换: $x = x(u, v), y = y(u, v)$. 区域 D 变为 Ω . 如果此变换满足

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$I = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv.$$

重积分的变量替换(续)

20.6.1 设 $\det(a_{ij}) \neq 0$ ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$). 选取适当

的变换求下列曲面围成的立体的体积:

$$(1) \left(\sum_{i=1}^3 a_{i1} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i2} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i3} x_i \right)^2 = R^2 \quad (R > 0);$$

$$(2) \left(\sum_{i=1}^3 a_{i1} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i2} x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^3 a_{i3} x_i \right)^2,$$

$$\sum_{i=1}^3 a_{i3} x_i = \pm h \quad (h > 0).$$

20.6.2 求椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.

20.6.3 作柱坐标变换计算下列积分:

(1) Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2, z = 4, z = 16$ 围成,

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 dx dy dz;$$

(2) Ω 由曲面 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ 围成,

$$\iiint_{\Omega} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 dx dy dz.$$

20.6.4 作球坐标变换计算下列积分:

(1) $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,$

$$\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz;$$

(2) Ω 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成,

$$\iiint_{\Omega} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^5 dx dy dz;$$

(3) Ω 由 $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 围成,

$$\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz.$$

20.6.5 作适当变量替换, 求下列三重积分:

(1) Ω 由 $x = \frac{x^2 + y^2}{a}, z = \frac{x^2 + y^2}{b}, xy = c, xy = d, y = \alpha x, y = \beta x$ 围成的立体 (其中 $0 < a < b, 0 < c < d, 0 < \alpha < \beta$),

$$\iiint_{\Omega} x^2 y^2 z dx dy dz;$$

(2) Ω 同(1), $\iiint_{\Omega} x^2 y z dx dy dz$;

(3) Ω 由 $x = az^2, x = bz^2$ ($z > 0, 0 < a < b$), $x = \alpha y, x = \beta y$ ($0 < \alpha < \beta$) 以及 $x = h$ ($h > 0$) 围成, $\iiint_{\Omega} y^4 dx dy dz$;

(4) Ω 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成,

$$\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dx dy dz$$

20.6.6 设一元函数 $f(t) \in C^{(1)}(0, +\infty)$. 令

$$\Omega_t = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq t^2 \right\},$$

$$F(t) = \iiint_{\Omega_t} f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz.$$

(1) 证明 $F(t) \in C^{(1)}(0, +\infty)$;

(2) 求出 $F'(t)$ 的表达式.

20.6.7 设有一光滑的封闭曲面 S , 球坐标方程为 $\rho = f(\varphi, \psi)$,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. 证明 S 围成立体之体积为

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^3(\varphi, \psi) \cos \psi d\psi,$$

并求出 $f(\varphi, \psi) = \sin^4 \varphi \cdot \sin^4 \psi$ 时的 V 值.

20.6.8 求函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的平均值

$$f_{\text{平均}} = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

(1) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, Ω 为由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ 围成的立体;

(2) Ω 是由曲面 $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1$ (m, n, p 为正数) 围成的立体在第一卦限的部分区域, $f(x, y, z) = x^m + y^n$.

20.6.9 在 R^n 中求椭球 $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$ 的容积.

20.6.10 在 R^n 中求由曲面 $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 = k^2$ 围成的区域的容积, 其中 $\det(a_{ij}) \neq 0, k > 0$.

20.6.11 在 R^n 中求由曲面 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \pm h_i$ ($h_i > 0, i = 1, \dots, n$) 围成的区域的容积, 其中 $\det(a_{ij}) \neq 0$.

20.6.12 证明广义柱坐标变换 T :

$$x_1 = a_1 r \cos \theta_1,$$

$$x_2 = a_2 r \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

.....

$$x_{n-2} = a_{n-2} r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2},$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2},$$

$$x_n = a_n z (a_i > 0, i = 1, \dots, n)$$

是 G 内的正则变换, 其中 G 为

$$G = \{(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, z) \mid 0 < r < +\infty; 0 < \theta_i < \pi, i = 1, \dots, n-3; 0 < \theta_{n-2} < 2\pi, -\infty < z < +\infty\},$$

并证明

$$DT(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, z) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) r^{n-2} \sin^{n-3} \theta_1 \sin^{n-4} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

20.6.13 证明 R^n 中的球坐标变换 T :

$$x_1 = r \cos \theta_1,$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-2} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2},$$

$$x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1},$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}$$

是 G 内的正则变换, 其中 G : $0 < r < +\infty$, $0 < \theta_i < \pi$ ($i=1, \dots, n-2$), $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$. 并证明

$$DT(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

20.6.14 利用 R^n 中球坐标变换求半径为 R 的球体的容积.

重积分在力学上的应用

20.7.1 求由圆锥曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$) 和平面 $z = h$ 围成的立体的形心(即 $\rho = 1$ 时立体的重心).

20.7.2 求抛物面 $z^2 + y^2 = px$ 和平面 $x = h$ (p, h 为正数)所围成的立体的形心.

20.7.3 求由三个坐标面和平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 围成的立体的形心.

20.7.4 求半球壳 $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0$ 的形心.

20.7.5 求质量为 m 的均匀长方体

$$S = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$$

关于 z 轴的转动惯量.

20.7.6 一物体 Ω 的密度是均匀的, 它关于 x 轴, y 轴和 z 轴

的转动惯量分别记为 I_x, I_y, I_z . 证明这三个转动惯量满足“三角不等式”: $I_x + I_y \geq I_z, I_y + I_z > I_x, I_z + I_x > I_y$.

20.7.7 求质量均匀的圆筒

$$\Omega = \{(x, y, z) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, -h \leq z \leq h\}$$

关于 x 轴和 z 轴的转动惯量.

20.7.8 有一非均匀的球, 球的半径为 R , 球的密度为 $\rho(x, y, z) = \rho(r)$, r 是 (x, y, z) 点到球心 $(0, 0, 0)$ 的距离. $\rho(r)$ 随 r 的增大而线性地减少, 从球心的 ρ_0 减至球面的 ρ_1 . (1) 求此球的重心; (2) 求此球关于一直径的转动惯量.

20.7.9 求密度均匀的椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的转动惯量: (1) 关于 z 轴的; (2) 关于过原点而由 $x:y:z = \alpha:\beta:\gamma (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$ 给出的任一轴.

20.7.10 求旋转体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z) (0 < a \leq z \leq b)$ 在原点的位势, 其中 $f(z)$ 连续, 在 $[a, b]$ 有正值.

20.7.11 有一半径为 a 的半球, 球的密度为 ρ (常数). 将球心置于原点并使它整个位于 xy 平面的上侧. 证明: 在点 $(0, 0, z)$ ($z > a$) 处的位势为

$$\frac{2\pi\rho}{z} \left[(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} + a^3 - \frac{3}{2}a^2 z \right] - \frac{2}{3}\pi\rho z^3.$$

* * *

20.1 证明 $\Omega \subset R^m$ 为一可测图形的充要条件是: 任给 $\epsilon > 0$, 存在两个可测图形 $W, \supset \Omega, U, \subset \Omega$, 使得

$$V(W \setminus U) = V(W) - V(U) < \epsilon.$$

如果此条件满足, 则有

$$V(\Omega) = \inf_{\epsilon > 0} \{V(W)\} = \sup_{\epsilon > 0} \{V(U)\}.$$

20.2 设 $\Omega \subset R^m$ 为一可测图形, 设 $\{S_n | n = 1, 2, \dots\}$ 为开

矩形的集合, $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n \supset \Omega$, 则称 $\{S_n | n=1, 2, \dots\}$ 为 Ω 的一开矩形覆盖. 证明

$$V(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} V(S_n) \mid \{S_n\} \text{ 为 } \Omega \text{ 的开矩形覆盖} \right\}.$$

20.3 设 A 为 R^m 的可测图形, A 可表为 $A = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i$, 其中 A_i

($i=1, 2, \dots$) 为可测图形, $A_i^\circ \cap A_j^\circ = \emptyset$ ($i \neq j$). 证明

$$V(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} V(A_i).$$

20.4 设 A 为 R^m 的可测图形, A 可表为 $A = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i$, 其中 A_i 为

可测图形, $A_{i+1} \supset A_i$ ($i=1, 2, \dots$). 证明 $V(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(A_n)$.

20.5 设 $f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) 在 R^m 的可测图形 Ω 上有界、可积, 而且 $f_k(x)$ 在 Ω 上一致收敛到 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 Ω 上有界可积, 而且

$$\int_{\Omega} f dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n dV = \int_{\Omega} (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) dV.$$

20.6 证明: 在半径为 R 的球 B ($x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$) 上的积分

$$\iiint_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R},$$

其中 $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$, $0 < |\theta| < 1$.

20.7 设区域 D 是 R^2 中一可测图形, $f(x, y)$ 在 $\bar{D}$ 连续. 证明:

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow +\infty \\ \eta \rightarrow +\infty}} \iint_D f(x, y) \ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) dx dy = 0$$

的充分必要条件是 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$.

20.8 设区域 Ω 是 R^3 中一可测图形, $f(x, y, z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 连续. 证明

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow +\infty \\ \eta \rightarrow +\infty \\ \zeta \rightarrow +\infty}} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}) dx dy dz = 0$$

的充分必要条件是 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$.

20.9 设 $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R^1$, 定义如下: 当 x 为有理数, $0 \leq y < \frac{1}{2}$ 时, $f(x, y) = 0$; 当 x 为有理数, $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ 时, $f(x, y) = 1$; 当 x 为无理数, $0 \leq y < \frac{1}{2}$ 时, $f(x, y) = 1$; 当 x 为无理数, $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ 时, $f(x, y) = 0$. 讨论两种二次定积分的存在情形.

20.10 证明 Cavalieri 原则: 设 Ω_1, Ω_2 是 R^3 的两个可测图形, 而且任一平面 $z = z_0$ 截出 Ω_1 与 Ω_2 的平面图形有相同的面积, 则 Ω_1 与 Ω_2 有相同的体积.

20.11 设 $f: A \subset R^m \rightarrow R^1$ 可积, 而且 $f(x) \geq 0 (x \in A)$. 证明: R^{m+1} 的点集 $S = \{(x, y) | x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 是一可测图形, 容积为 $\int_A f(x) dV^{(m)}$.

20.12 求函数 $f(x, y) = \sin^{2n} x \sin^{2n} y$ ($n \geq 1$) 在区域 $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$ 的平均值 I :

$$I = \frac{1}{V(D)} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

20.13 证明

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

20.14 令 $A = \int_0^1 e^{-t^2} dt$, $B = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$. 证明: 对于积分

$$I = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\pi} e^{-x^2} dy, \text{ 存在正数 } m \text{ 和 } n, \text{ 使得}$$

$$I = mA - nB + e^{-1} - e^{-\frac{1}{4}}.$$

20.15 证明: $f(x, y) = \text{sign}(a^2 x^2 - y^2 + 2)$ 在 $a^2 x^2 + y^2 \leq 4$ ($a > 0$) 上可积, 并求出积分值.

20.16 设 $f(x, y) \in C^{(1)}$, 其等高线 $f(x, y) = v$ (v 为参数) 是简单封闭曲线, 它围成的区域的面积为 $F(v)$. 设 $F(v)$ 是连续可微函数. 令 Ω_{v_1, v_2} 是由曲线 $f(x, y) = v_1$ 和 $f(x, y) = v_2$ ($v_1 < v_2$) 围成的区域. 证明

$$\iint_{\Omega_{v_1, v_2}} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

利用此结论计算积分 $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, $\Omega: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

20.17 设 $f(x, y, z) \in C^{(1)}$, 其等值面 $f(x, y, z) = v$ (v 为参数) 是一简单封闭曲面, 它围成的立体体积为 $F(v)$. 设 $F(v) \in C^{(1)}$. 令 Ω_{v_1, v_2} 是由曲面 $f(x, y, z) = v_1$ 和 $f(x, y, z) = v_2$ ($v_1 < v_2$) 围成的立体. 证明

$$\iiint_{\Omega_{v_1, v_2}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

利用上述结果计算 $\Omega_{a_1, a_2}: a_1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq a_2$ 上的积分

$$\iiint_{\Omega_{a_1, a_2}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz.$$

20.18 设 $f(x)$ 在 R^1 上有二阶连续导数, 且

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

$$M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)| dx < +\infty.$$

证明: (1) $M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$; (2) $M_2^2 \leq 4M_0M_1$.

提示: 利用积分余项的泰勒公式证(1).

20.19 设 D 是 R^2 中的单位圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$. 给定积分

$$(Fh) = \iint_D f(\alpha x + \beta y) dx dy \quad (h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0).$$

$$(1) \text{ 证明 } F(h) = 2 \int_{-1}^1 f(h\xi)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi;$$

$$(2) \text{ 令 } f(u) = \cos u, \text{ 证明 } F(h) = \frac{2\pi}{h} J_1(h) \quad (h > 0), \text{ 其中}$$

$$J_1(h) = \frac{2h}{\pi} \int_0^1 (\cosh \xi)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi \text{ 为 Bessel 函数.}$$

20.20 设 Ω 为 R^3 的单位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. 给定积分

$$F(h) = \iiint_{\Omega} \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z) dx dy dz, \text{ 其中 } h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} > 0.$$

$$(1) \text{ 证明 } F(h) = \frac{4\pi}{h^2} \left(\frac{\sinh h}{h} - \cosh h \right) \quad (h > 0);$$

$$(2) \text{ 证明 } F(h) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 连续};$$

$$(3) \text{ 求证 } F(h) \text{ 有无穷多个零点.}$$

20.21 设 Ω 是由 $y-x=1$, $y+x=2$ 和 $x=0$ 围成的区域.

将二重积分 $\iint_{\Omega} \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy$ 化成单重积分, 并求出积分的近似

值, 误差不超过 0.01.

20.22 设 Ω 是由曲面 $x+y+z=1$, $y=0$, $z=0$, $x=0$ 围成的区域. 证明

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)},$$

其中 p, q, r, s 是正数.

提示: 作变换 $x+y+z=\xi, y+z=\xi\eta, z=\xi\eta\xi$.

20.23 证明: 由曲面 $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{a_i^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2} (0 \leq x_n \leq a_n)$ 所围成的 n 维锥体的

的体积为

$$V = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

20.24 证明 R^n 中的 n 重积分

$$\int \cdots \int_{\substack{0 < a \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq b \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, n}} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b f(y) \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy.$$

20.25 设 $f(x)$ 有二阶连续导数. 证明二阶差分

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = \int_0^h \int_0^h f''(x+u_1+u_2) du_1 du_2.$$

20.26 设 $f(t)$ 连续. 证明

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right]^n.$$

20.27 设 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是在区域 $0 \leq x_i \leq x (i=1, \dots, n)$ 上的连续函数, 证明等式

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 (n \geq 2).$$

20.28 证明等式

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

20.29 设

$$I = \int \left[\cdots \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{m_j} \right) dx_1 \cdots dx_n \right]$$

其中 m_j 为自然数, $j=1, \cdots, n$.

(1) 证明: 若 $m_1, \cdots, m_n$ 中至少有一个为奇数时, 则 $I=0$;

(2) 设 $m_j (j=1, \cdots, n)$ 为偶数, 计算 I 之值.

20.30 将 R^n 上的 n 重积分

$$\int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1} f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

化为单重积分, 其中 $f(u)$ 为一元连续函数.

20.31 令 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 是面积为 A 的三角形的三个顶点, 顶点坐标的脚码是按逆时钟方向给定的. 证明此三角形关于 x 轴的转动惯量为

$$\frac{A}{6} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1).$$

20.32 椭球的八分之一为

$$\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,$$

求 Ω 的形心的 x 坐标.

20.33 椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 被平面 $lx + my + nz = p$ 剖分为

两块立体, 求此两块立体之体积.

20.34 证明: 物体 Ω 在足够远处的位势近似于将其质量集中于它的重心的一质点的位势, 其误差小于某一常数除以该点到重心的距离的平方.

20.35 令 O 是任一点, S 是任一物体. 在所有从 O 出发的半射线上取一点 P , P 与 O 点的距离为 $\frac{1}{\sqrt{I}}$, 其中 I 表示 S 关于与该射线相重合的直线的转动惯量. 证明这些 P 点作成一椭球, 称为惯量椭球.

20.36 求椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 在点 (ξ, η, ζ) 处的惯量椭球.

20.37 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin \varphi \sin \theta) d\varphi d\theta = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin \xi) d\xi \right]^2.$$

第二十一章 曲线积分

与曲线有关的一些概念

21.1.1 设有一光滑曲线 Γ 有一参数式 $r(t) \in C^{(1)}[a, b]$, $|r'(t)| \neq 0$, 称 $r(t)$ 是 Γ 的 $C^{(1)}$ 参数式.

(1) 设有一元函数 $\varphi(\tau) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, 而且 $\varphi'(\tau) > 0$ ($\tau \in [\alpha, \beta]$). 证明 $\rho(\tau) = r(\varphi(\tau))$ ($\tau \in [\alpha, \beta]$) 也是 Γ 的 $C^{(1)}$ 参数式. 记作 $\rho(\tau) \sim r(t)$.

(2) 证明 Γ 的 $C^{(1)}$ 参数式 $\rho(\tau) \sim r(t)$, 满足等价关系: (a) $r(t) \sim r(t)$; (b) 若 $\rho(\tau) \sim r(t)$ 则 $r(t) \sim \rho(\tau)$; (c) 若 $r(t) \sim \rho(\tau)$, $\rho(\tau) \sim s(v)$, 则 $r(t) \sim s(v)$.

(3) 证明: 若 $r(t) \sim \rho(\tau)$, 则有

$$\int_a^b |r'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\rho'(\tau)| d\tau.$$

这说明对于等价的 $C^{(1)}$ 参数式来说, 弧长有相同的积分表达式.

21.1.2 设 Γ 是一条光滑曲线, $r(t)$ 是它的 $C^{(1)}$ 参数式, Γ 对

应于 $[a, \tau]$ 一段的弧长为

$$s = \varphi(\tau) = \int_a^{\tau} |\mathbf{r}'(t)| dt, \tau \in [a, b]$$

如果 Γ 的弧长为 l , 则 $\varphi(b) = l$.

(1) 证明 $\varphi: [a, b] \rightarrow [0, l]$ 是一一对应;

(2) 证明 Γ 有以弧长 s 为参数的 $C^{(1)}$ 参数式 $\mathbf{p}(s), s \in [0, l]$;

(3) 证明 $|\mathbf{p}'(s)| = 1$;

(4) 若 $\mathbf{r}(t) \in C^{(2)}[a, b]$, 证明 $\mathbf{p}(s) \in C^{(2)}[0, l]$, 而且 $\mathbf{p}''(s)$ 与 $\mathbf{p}'(s) (s \in [0, l])$ 垂直;

(5) 证明 $\varphi''(t) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) / \varphi'(t)$;

(6) 证明

$$|\mathbf{p}''(s)|_{s=\varphi(t)} = \frac{[|\mathbf{r}''(t)|^2 |\mathbf{r}(t)|^2 - \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)]^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{r}'(t)|^2}.$$

$|\mathbf{p}''(s)|$ 在几何上称为曲线的绝对曲率.

21.1.3 计算下列曲线的弧长:

(1) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln(\sec t)\mathbf{j} + \ln(\sec t + \tan t)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$;

(2) $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + b \omega t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq t_1$;

(3) $x^2 + y^2 = cz, y = x \tan \frac{z}{c}$, 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

($z_0 > 0$).

21.1.4 在 R^3 的柱坐标系中, 光滑曲线 Γ 有 $C^{(1)}$ 参数式 $\mathbf{p}(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \mathbf{i} + r(\varphi) \sin \varphi \mathbf{j} + z(\varphi) \mathbf{k}, \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. 求 Γ 弧长的积分表示式.

21.1.5 在 R^3 的球坐标系中, 光滑曲线 Γ 有参数式

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\varphi) = & \rho(\varphi) \cos \varphi \cos(\psi(\varphi)) \mathbf{i} + \rho(\varphi) \sin \varphi \cos(\psi(\varphi)) \mathbf{j} \\ & + \rho(\varphi) \sin(\psi(\varphi)) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

$\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, 其中 $\rho(\varphi), \psi(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_1, \varphi_2]$. 求 Γ 的弧长的积

分表示式.

21.1.6 设一元函数 $y=f(x)$ 是非负单调连续可微函数, $f(x)$ 在任一区间上的曲边梯形的面积与弧长成正比, 求此函数 $f(x)$.

21.1.7 设光滑曲线 Γ 有一 $C^{(1)}$ 参数式

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in [a, b],$$

满足 $x(t):y(t):z(t) = \alpha:\beta:\gamma$, 其中 α, β, γ 为正常数, 而且对应于 $t \in [a, t_1] (\forall t_1 \in [a, b])$ 的一段弧长为 t_1^3 . 求出此 Γ 的 $C^{(1)}$ 参数式.

第一型曲线积分

21.2.1 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_C y^2 ds$, C 为摆线的一拱:

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$$

(2) $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

(3) $\int_C xyz ds$, C 为螺线:

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt (0 < a < b), 0 \leq t \leq 2\pi;$$

(4) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

(5) $\int_C x^2 ds$, C 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$

之交线;

(6) $\int_C xy ds$, C 与(5)相同;

(7) $\int_C (xy + yz + zx) ds$, C 与(5)相同.

21.2.2 设 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在点 (x, y, z) 的线密度.

若 $\rho \equiv \rho_0$ (常数), 则称 C 为密度均匀的.

(1) 计算密度均匀的平面曲线 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ 从 $A(0, a)$ 到 $B(b, a \cosh \frac{b}{a})$ 的弧的重心坐标.

(2) 计算球面三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x > 0, y > 0, z > 0$ 的围线的重心坐标.

21.2.3 求螺线的一支 $C: x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$

($0 \leq t \leq 2\pi$) 对 x 轴的转动惯量 $I = \int_C (y^2 + z^2) ds$, 设此螺线的线密度是均匀的.

21.2.4 计算单层对数位势 $u(x, y) = \oint_L \rho_0 \ln \frac{1}{r} ds$, 其中 ρ_0

为常数, (x, y) 为固定的某一点, L 为圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, (x, y) 不在 L 上, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$.

21.2.5 设 $f(x, y)$ 连续, L 是一封闭的逐段光滑简单曲线. 证明

$$u(x, y) = \oint_L f(\xi, \eta) \ln \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} \right) ds$$

当 $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ 时趋于零的充要条件是 $\oint_L f(\xi, \eta) ds = 0$.

第二型曲线积分

21.3.1 计算第二型曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} y dx + x dy, A(1, 1), B(2, 4)$, 方向从 A 到 B :

(1) $\widehat{AB}$ 为连结 A 与 B 点的直线段 $\overline{AB}$;

(2) $\widehat{AB}$ 为连结 A 与 B 点的抛物线段 $y=x^2$ ($1 \leq x \leq 2$);

(3) $\widehat{AB}$ 为折线段: $\overline{AC} + \overline{CB}$, 其中 $C(2, 1)$, 方向从 A 到 C , 再从 C 到 B .

21.3.2 计算 $\int_{\widehat{AB}} y dx - x dy$, A 点, B 点以及弧 $\widehat{AB}$ 同

21.3.1.

21.3.3 求力场 F 对运动的单位质点所作的功, 此质点沿曲线 C 从 A 点运动到 B 点:

(1) $F = (x - 2xy^2)\mathbf{i} + (y - 2x^2y)\mathbf{j}$, C 为平面曲线 $y = x^2$, $A(0, 0)$, $B(1, 1)$;

(2) $F = (x + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$, C 为平面曲线 $y = 1 - |1 - x|$, $A(0, 0)$, $B(2, 0)$;

(3) $F = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$, C 的 $C^{(1)}$ 参数式为 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$;

(4) $F = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$, C 的参数式为 $x = \alpha \cos t$, $y = \beta \sin t$, $z = \gamma t$ (α, β, γ 为正数), $A(\alpha, 0, 0)$, $B(\alpha, 0, 2\pi\gamma)$.

21.3.4 计算下列曲线积分

$$\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz.$$

(1) C 为球面三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 的边界线, 从球的外侧看去, C 的方向为逆时针方向;

(2) C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 的交线位于 xy 平面上方的部分, 从 x 轴上 $(b, 0, 0)$ ($b > a$) 点看去, C 的方向是顺时针方向.

21.3.5 求闭曲线 C 上的第二型曲线积分

$$\oint_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}.$$

- (1) C 为圆 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向;
 (2) C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 顺时针方向;
 (3) C 是以 $(0, 0)$ 为中心而边长为 a 的正方形, 顺时针方向;
 (4) C 是以 $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$ 为顶点的三角形, 顺时针方向.

21.3.6 求闭曲线 C 上的第二型曲线积分

$$\oint_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$$

C 及 C 的方向同 21.3.5.

21.3.7 设 P, Q, R 在 L 上连续, L 为光滑弧段, 弧长为 l . 证明

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leq Ml,$$

其中

$$M = \max_{(x, y, z) \in L} \{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\}.$$

21.3.8. 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 计算

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{Ax^2 - 12Bxy + Cy^2}$$

(A, C 为正数, $AC - B^2 > 0$), L 取正向.

平面上的第二型曲线积分与格林公式

21.4.1 应用格林公式计算下列积分:

- (1) $\oint_{\partial D} xy^2 dy - x^2 y dx$, $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$;
 (2) $\oint_{\partial D} (x^2 + y^3) dx - (x^3 - y^2) dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$;
 (3) $\oint_{\partial D} (e^x \sin x dx + e^{-x} \sin y dy)$, $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$;

$$(4) \oint_{\partial D} e^{xy} [(y \sin xy + \cos(x+y)) dx + (x \sin xy + \cos(x+y)) dy],$$

其中 D 是分段光滑曲线围成的单连通闭区域.

21.4.2 设 $f(x) \in C^{(1)}$, L 是任一逐段光滑的封闭曲线, 证明

$$(1) \oint_L f(xy) (y dx + x dy) = 0;$$

$$(2) \oint_L f(x^2 + y^2) (x dx + y dy) = 0;$$

$$(3) \oint_L f(x^n + y^n) (x^{n-1} dx + y^{n-1} dy) = 0.$$

21.4.3 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 除一点 $M_0(x_0, y_0)$ 之外, 在全平面连续可微, 而且 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, L 是逐段光滑的简单闭曲线, 讨论

$I = \oint_L P dx + Q dy$ 的取值:

(1) 若 L 围成的内部区域不包含 M_0 点, 且 L 不经过 M_0 点, 则 $I = 0$;

(2) 若 L 围成的内部区域包含 M_0 点, 则对任一以 M_0 为中心的圆 Γ , 都有 $I = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy$; 其中 L 与 Γ 都取正向;

(3) 设 C 是一环绕 M_0 转 n 圈的闭曲线, 方向为逆时针方向, Γ 同(2), 则

$$\oint_C P dx + Q dy = n \oint_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

21.4.4 求 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, L 是不经过原点的简单闭曲线, 逆时针方向. 设 L 围成的区域为 D .

- (1) D 不包含原点;
 (2) D 包含原点于其内部;

(3) 依(1)、(2)的 D , 讨论 $J = \oint_L \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$.

21.4.5 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 除有限个点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ 之外有连续偏导数, 而且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, L 是不经过 $M_i (i=1, \dots, n)$ 的简单闭曲线. 讨论积分 $I = \oint_L P dx + Q dy$ 之值:

- (1) 若 L 围成的内部区域为 D , $M_1, \dots, M_n$ 位于 D 之内部, 则

$$I = \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} P dx + Q dy, \text{ 其中 } \Gamma_i (1 \leq i \leq n) \text{ 是以 } M_i \text{ 为中心, } R_i \text{ 为}$$

半径的圆, Γ_i 内不包含 $M_j (j \neq i)$. Γ_i 与 L 同向;

- (2) 若 L 围成的闭区域 $\bar{D}$ 不包含 $M_1, \dots, M_n$, 则 $I=0$;

(3) 若 L 围成的区域 D 的内部只含 $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$, 其中 $i_1, \dots, i_k$ 是 $1, 2, \dots, n$ 中彼此不等的正数, L 不包含 $M_1, M_2, \dots,$

M_n 的其它的点, 则 $I = \sum_{i=1}^k \oint_{\Gamma_{i_i}} P dx + Q dy$, 其中 Γ_{i_i} 是以 M_{i_i} 为中心的小圆.

21.4.6 设 C 为光滑的闭曲线, α 为任一固定的单位向量. 证明 $\oint_C \cos \langle \alpha, n \rangle ds = 0$, 其中 n 为 C 的外法线方向.

21.4.7 求 $I = \oint_L [x \cos \langle n, i \rangle + y \cos \langle n, j \rangle] ds$, 其中 L 为

包围有界区域 D 的光滑闭曲线, n 为 L 的外法向.

21.4.8 计算

$$I = \oint_L \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \cos y + y \sin y) dy + (x \sin y - y \cos y) dx],$$

其中 L 是包含原点在其内部的分段光滑的闭曲线.

21.4.9 设简单闭曲线 L 包含坐标原点. 又设 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ 都属于 $C^{(2)}$. 曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 与 $\psi(x, y) = 0$ 在 L 围成的区域 D 内有 n 个交点: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$, 而且 $\left. \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|_{M_i} \neq 0 (i=1, \dots, n)$. 证明

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_L \frac{\varphi d\psi - \psi d\varphi}{\varphi^2 + \psi^2} = \sum_{i=1}^n \operatorname{sign} \left[\left. \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right|_{M_i} \right],$$

其中 L 为逆时针方向, L 不含 $\varphi(x, y) = 0$ 与 $\psi(x, y) = 0$ 的交点.

21.4.10 设 $P(x, y), Q(x, y) \in C^{(2)}$, 线积分

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy.$$

证明对于任意逐段光滑闭曲线 C , I 与 α 和 β 无关的充分必要条件是: 存在一常数 K , 存在 $u(x, y) \in C^{(2)}$ 和 $\varphi(y) \in C^{(2)}$ 使得

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, Q(x, y) = Kx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \varphi(y).$$

21.4.11 利用格林公式计算下列图形的面积:

(1) 笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$;

(2) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

(3) $x^n + y^n = 1 (n > 0)$;

(4) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$, 其中 a, b, c 为正数,

n 为自然数.

21.4.12 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆外侧圆周滚动而不滑动. 由动圆上一定点所描绘出来的轨线称为外摆线.

设 $\frac{R}{r} = n$ (自然数).

- (1) 求外摆线的参数方程;
- (2) 求外摆线围成的图形的面积;
- (3) 如果 $r = R$, 为心脏线, 求出心脏线围成区域的面积.

21.4.13 一半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆的内侧滚动而不滑动. 由动圆上一点描绘出来的轨线称为内摆线. 设 $\frac{R}{r} = n$ (自然数).

- (1) 求内摆线的参数方程;
- (2) 求内摆线围成区域的面积;
- (3) 如果 $\frac{R}{r} = 4$, 为星形线, 求出星形线围成区域的面积.

21.4.14 设 $u = u(x, y)$ 为单位圆 D 上的正调和函数 (即 $u(x, y) \geq 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). 令 $f(x, y) = [u(x, y)]^p$ ($p > 0$).

- (1) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$;
- (2) 设 C_1, C_2 为 D 内光滑曲线, C_1 位于 C_2 所围成的区域内. 证明:

$$p > 1 \text{ 时, } 0 \leq \int_{C_1} \frac{\partial f}{\partial n} ds \leq \int_{C_2} \frac{\partial f}{\partial n} ds;$$

$$p = 1 \text{ 时, } 0 = \int_{C_1} \frac{\partial f}{\partial n} ds \leq \int_{C_2} \frac{\partial f}{\partial n} ds;$$

$$0 < p < 1 \text{ 时, } 0 \geq \int_{C_1} \frac{\partial f}{\partial n} ds \geq \int_{C_2} \frac{\partial f}{\partial n} ds,$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial n}$ 是 f 沿 C 的外法向的方向导数;

- (3) 证明:

$$p > 1 \text{ 时, } [u(0,0)]^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(r\cos\theta, r\sin\theta)]^p d\theta;$$

$$p = 1 \text{ 时, } [u(0,0)]^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(r\cos\theta, r\sin\theta)]^p d\theta;$$

$$0 < p < 1 \text{ 时, } [u(0,0)]^p \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(r\cos\theta, r\sin\theta)]^p d\theta,$$

其中 r 满足: $0 < r < 1$.

* * *

21.1 设 Γ 有参数式 $\mathbf{r}(t)$ ($t \in [a, b]$), $\mathbf{r}(t) \in C^{(1)}[a, b]$, $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ ($t \in [a, b]$). 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Γ 上一点, 使 $\mathbf{r}(t) = P_0$ 的 t ($t \in [a, b]$) 的个数称为 P_0 点的重数.

(1) 证明 Γ 上任一点的重数是有限数;

(2) 证明 Γ 是可求长曲线.

21.2 设 Γ 是一椭圆 $x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. 求 $\int_{\Gamma} \frac{y dx}{x^2 + y^2}$, Γ 取正方向.

21.3 设有一中心力 $\mathbf{F} = \frac{K}{r^3} \mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$), 一动点 P 沿一曲线 C 运动, $C: \mathbf{r}(\theta) = a\cos\theta\mathbf{i} + a\sin\theta\mathbf{j} + c\theta\mathbf{k}$. 求 θ 从 0 变到 π 时, 力 $\mathbf{F}$ 对动点 P 所作的功 (P 的质量设为 1).

21.4 设 C 是平面上围成面积为 A (常数) 的区域 D 的任一条逐段光滑的简单闭曲线. 证明

$$\int_C (a_1x + a_2y + a_3) dx + (b_1x + b_2y + b_3) dy = (b_1 - a_2) A,$$

其中 a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$) 为常数, C 取正向.

21.5 设 G 是 R^2 的一个开区域, 它由 xy 平面去掉 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$ 所构成的. 设 P 是 G 内的任一点, L 是连结 $(0, 0)$ 点与 P 点而位于 G 内的任一逐段光滑曲线. 给定线积分

$$I = \int_L \left[\frac{y}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+2)^2 + y^2} \right] dx + \left[\frac{2-x}{(2-x)^2 + y^2} + \frac{-(2+x)}{(2+x)^2 + y^2} \right] dy,$$

讨论当 L 选取不同的路线时 I 取值的情况. 问 I 能取几种不同的值?

21.6 设 C_1, C_2 是围绕原点的两条简单光滑闭曲线, 且 C_1 整个位于 C_2 之内. 求证: $p > 0$ 时, 有

$$\int_{C_1} r^p d\theta \leq \int_{C_2} r^p d\theta,$$

其中 r 为极径, θ 为极角.

提示: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$.

21.7 设 $u(x, y)$ 在区域 D 上有二阶连续偏导数. 证明 $u(x, y)$ 在 D 内为调和函数的充分必要条件是: 对 D 内任一简单光滑闭曲线 L , 都有

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

21.8 设 D 是一闭区域, 试证明: 在 D 上调和且连续的函数 $u(x, y)$ 由它在 ∂D 上的值唯一确定. 如果 D 是有限个闭区域的并集, 上述结论是否仍正确?

21.9 设 $u(x, y)$ 是区域 G 上的调和函数, (x_0, y_0) 是 G 内的一点. C_R 是以 (x_0, y_0) 为中心半径为 R 的圆周, $C_R \subset G$. 又设 C_ρ 是以 (x_0, y_0) 为中心半径为 ρ ($\rho < R$) 的任一圆周. 令

$$v = \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad ((x, y) \neq (x_0, y_0)).$$

(1) 证明: $v(x, y)$ 是 xy 平面挖去 (x_0, y_0) 点而得到的开区域内的调和函数;

(2) 证明: $\int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_R} u \frac{\partial v}{\partial n} ds;$

(3) 利用(2)证明: $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u(x, y) ds.$

21.10 设 D 是有界闭区域, $u(x, y)$ 在 D 上连续, 在 D 内调和. 证明: 除 $u(x, y) \equiv \text{常数} [(x, y) \in D]$ 外, $u(x, y)$ 不能在 D 的内部达到最大值与最小值, 也就是说, $u(x, y)$ 只能在 ∂D 上达到最大值与最小值.

第二十二章 曲面积分

曲面概念与曲面面积

21.2.1 求球面包含在两条纬线和两条经线之间部分的面积.

22.2.2 求环面 $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, z = a \sin \psi$ ($0 < a \leq b$) 被两条经线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ 所围成那部分的面积, 并求出整个环面的面积.

22.2.3 求螺旋面 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi$ ($0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$) 的面积.

22.2.4 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱体 $y^2 + z^2 \leq 1$ 内那部分的面积.

22.2.5 求曲面 $z = \sqrt{2xy}$ 被平面 $x + y = 1, x = 1$, 及 $y = 1$ 所截下的那部分的面积.

22.2.6 求曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2, x + y + z = 2a (a > 0)$ 围成的立体的表面积和体积.

22.2.7 椭圆面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 被平面 $lx + my + nz = p$ 剖分

为两个部分, 试用重积分表示这两部分之面积.

22.2.8 平面上一椭圆绕其长轴旋转得一旋转椭球 Ω , 求 Ω 之表面积.

第一型曲面积分

22.3.1 求下列积分:

(1) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, S 为立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界面;

(2) $\iint_S |x^3 y^2 z| dS$, S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 割下的部分;

(3) $\iint_S z^2 dS$, S 为螺旋面的一部分: $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$

($0 < u < a, 0 < v < 2\pi$);

(4) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的表面.

22.3.2 证明普阿松公式

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\xi \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) d\xi.$$

其中 $f(u) \in C^{(1)}$, S 是球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 的表面.

22.3.3 求密度为 ρ_0 (常数) 的球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 对于 z 轴的转动惯量 $I = \iint_S (x^2 + y^2) \rho_0 dS$.

22.3.4 求均匀的曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 所割下的部分的重心坐标.

22.3.5 求均匀曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a)$ 的重心坐标.

22.3.6 求密度为 ρ_0 (常数) 的截圆锥面 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a)$ 对位于曲面顶点 $(0, 0, 0)$ 的单位质点的吸引力. 当 $b \rightarrow 0$ 时, 结果如何?

22.3.7 计算 $F(t) = \iint_S f(x, y, z) dS$, 其中 S 是一平面 $x + y + z = t$, 而

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{当 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

作出 $u = F(t)$ 的图形.

22.3.8 计算 $F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \xi) dS$, 其中 S 为曲面 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2 = t^2$, 且假定 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0$,

$$f(\xi, \eta, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 < a^2; \\ 0, & \text{当 } \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 \geq a^2. \end{cases}$$

曲面的侧

22.4.1 下列曲面都是分块光滑的曲面. 试将这些曲面分为两两之间无公共内点的光滑曲面的并, 用参数式表示这些光滑块, 并确定它们的边界定向, 使与指定的 S 的定侧一致.

(1) 顶点为 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 的棱锥体的边界面 S , $\mathbf{n}$ 指向外侧;

(2) 边长是单位长的正方体的边界面 S , $\mathbf{n}$ 指向正方体的内部;

(3) 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, $\mathbf{n}$ 指向球的内部;

(4) 锥面 $S: x^2 + y^2 - z^2 = 0, |z| \leq 1$, $\mathbf{n}$ 指向锥体外侧;

(5) 设 $S = S_1 \cup S_2$, 其中

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + z^2 = 12, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + 3y^2 + z^2 = 12, \frac{1}{2} \leq y \leq 0 \right\}.$$

S_1 与 S_2 均指外侧.

(6) 设 $S = \{(x, y, z) \mid |z| = x^2 + y^2, |z| \leq 1\}$, n 指向 S 的外侧.

第二型曲面积分

22.5.1 计算下列第二型曲面积分:

$$(1) \iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy, S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{内侧};$$

$$(2) \iint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy, S \text{ 是立体 } \Omega \text{ 的外表}$$

面, 外侧, $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$;

$$(3) \iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy, S \text{ 为椭球面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的上半部分, 下侧.

$$(4) \iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy, S \text{ 为球面}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

的上半部分(即 $z \geq 0$), 上侧.

*

*

*

22.1 求由方程 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 - y^2$ 确定的曲面的面积.

22.2 求一向量场 $v(x, y, z)$, 使流过给定顶点 A 的任一锥面的流量为零.

22.3 设有一光滑曲面 S , 柱坐标方程为 $z = z(r, \theta)$, 证明 S 上任一光滑曲线的弧微分 ds 满足

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right] dr^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} dr d\theta + \left[r^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2$$

22.4 设有一光滑曲面 S , S 是光滑曲线 $z = z(x)$ 绕 z 轴旋转而得到的旋转曲面, 证明 S 上光滑曲线的弧微分 ds 满足

$$ds^2 = f(r) dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

其中 r, θ 为 xy 平面上的极坐标, $f(r) = 1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2$.

第二十三章 场 论

向量场的通量、散度和高斯公式

23.2.1 求下列向量场通过曲面 S 的通量:

(1) $F = y\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\},$$

S 为 Ω 的表面, 外侧;

(2) $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y + z = 1\}$,

下侧;

(3) $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$, 下侧.

23.2.2 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy$, 其中 $P = x - y^2 + z^2$,

$$Q = y - z^2 + x^2, R = z - x^2 + y^2,$$

$$S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \text{ 外侧};$$

(2) 23.2.1 题的 (1) 所给出的曲面积分;

(3) $\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy$, 其中 $P = y^3 + z^2 - x$,

$$Q = z^3 + x^2 - y, R = x^2 + y^2 - z,$$

$$S: |x-y+z| + |y-x+z| + |z-x+y| = 1, \text{ 内侧};$$

(4) $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, 其中 S 为圆锥体

$$x^2 + y^2 \leq z^2 (0 \leq z \leq h)$$

的边界面, 外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 S 的外法向 $\mathbf{n}$ 的方向余弦.

23.2.3 计算高斯积分

$$I(x, y, z) = \iiint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS,$$

其中 S 为简单封闭光滑曲面, 所包含的体积为 V , $\mathbf{n}$ 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 的外法向, $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$.

对下列两种情形进行讨论:

- (1) 曲面 S 包围的区域不含 (x, y, z) 点;
- (2) 曲面 S 包围的区域含 (x, y, z) 点.

23.2.4 求证

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS,$$

其中 S 是包围立体 V 的分块光滑的封闭曲面, $\mathbf{n}$ 为 S 上的点 (ξ, η, ζ) 处的外法向, $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$, 对下列两种情况进行讨论:

- (1) V 中不含 (x, y, z) 点;
- (2) V 中含 (x, y, z) 点, 此时令

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{V - V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r},$$

其中 V_ϵ 是以 (x, y, z) 为中心, 充分小的 ϵ 为半径的球.

23.2.5 计算下列曲面积分:

- (1) $\iint_S (x^2 - y^2) dy dz + (y^2 - z^2) dz dx + 2z(y - x) dx dy$, 其中 S 是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (z \geq 0) \text{ 下侧};$$

- (2) $\iint_S (x + \cos y) dy dz + (y + \cos z) dx dz + (z + \cos x) dx dy$, 其

中 S 是立体 Ω 的边界面, 而立体 Ω 由 $x+y+z=1, x=0, y=0$ 和 $z=0$ 围成;

$$(3) \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ 其中 } \mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$z \geq 0$, 上侧, $\mathbf{n}$ 是 S 的外法向;

$$(4) \iiint_S \left(\frac{x^3}{a^2} + yz \right) dy dz + \left(\frac{y^3}{b^2} + z^3 x^2 \right) dx dz + \left(\frac{z^3}{c} + x^3 y^3 \right) dx dy,$$

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (x \geq 0), \text{ 后侧.}$$

23.2.6 求

$$(1) \operatorname{div}(\operatorname{grad} u), \text{ 其中 } u(x, y, z) \in C^{(2)};$$

(2) $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, f(r) \in C^{(2)}$, 问对什么样的 $f(r)$, 有 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

23.2.7 设 $\mathbf{c}$ 是常向量. 证明:

$$(1) \operatorname{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} u;$$

$$(2) \operatorname{div}[f(r)\mathbf{c}] = \frac{f'(r)}{r}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}), \text{ 其中 } f \in C^{(1)},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

23.2.8 求引力场 $\mathbf{F} = \frac{k\mathbf{r}}{r^3}$ (k 为常数) 的散度, 其中

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

23.2.9 设有一数量场 $F(x, y, z) \in C^{(1)}$ (除点 $(0, 0, 0)$ 外), 其等值面是以原点为中心的球面, 又数量场的梯度场 $\operatorname{grad} F(x, y, z)$ 的散度恒为零. 证明此数量场与 $\frac{C_1}{r}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 仅差一个常数, 其中 C_1 为某固定常数

23.2.10 设有 $C^{(1)}$ 场 $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ($x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$). 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 上 $\mathbf{F}$ 的长度保持一固定值, $\mathbf{F}$ 的方向与

矢径 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 相同, 而且 F 的散度恒为零. 证明此向量场为 $F = \frac{K\mathbf{r}}{r^3}$ (K 为常数).

23.2.11 物体以一角速度 ω (常数) 依逆时针方向绕 z 轴旋转. 在任一固定时刻, 空间的点 $M(x, y, z)$ 有速度向量 $\mathbf{v}$ 与其对应. 求此速度场的散度.

23.2.12 求流体速度场 $\mathbf{v} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ 穿过曲面 $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ 向外的流量.

23.2.13 求电场 $E = y^2z^2\mathbf{i} + z^2x^2\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$ 通过 S 的电通量: (1) S 是圆柱体 $x^2 + y^2 = a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的表面; (2) S 是(1)的圆柱体的侧表面.

23.2.14 求电场 $E = K \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ 穿过围绕坐标原点的任一内部光滑的简单封闭曲面的电通量.

23.2.15 设 G 是 R^3 的开区域, $u(x, y, z)$ 在 G 上有二阶连续偏导数. 证明 $u(x, y, z)$ 在 G 内调和的充分必要条件是, 对 G 内任一简单逐块光滑曲面 S , 都有

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

23.2.16 设 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 有二阶连续偏导数, 在一有界闭区域 Ω 上调和, $\partial\Omega$ 为分块光滑曲面. 若在 $\partial\Omega$ 上 $u(x, y, z) = v(x, y, z)$, 则有 $u(x, y, z) \equiv v(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega$.

23.2.17 设 $u(x, y, z)$ 在由分块光滑曲面 S 围成的有界闭区域 Ω 上调和.

(1) 设 $M(x, y, z)$ 是 Ω 内任一点, S_ρ 是以 M 为中心, ρ 为半径的球面, $S_\rho \subset \Omega^\circ$. 证明

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS = - \iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是外法向, $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$, (ξ, η, ζ) 是曲面上的动点.

(2) 证明: 对于任一球 S_R , 有

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi R^2} \iint_{S_R} u(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

其中 S_R 为以 (x, y, z) 为中心, R 为半径的球, $S_R \subset \Omega^\circ$.

(3) $u(x, y, z)$ 除恒为常数外, 不能在 Ω 内部 Ω° 内取最大值和最小值.

23.2.18 设 $x = r \cos \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, $\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向. $u(x, y, z)$ 在 Ω 上有连续的二阶偏导数.

(1) 证明: 在曲面 $r = r_i$ 上, 有 $(\text{grad} u) \cdot \mathbf{n} = (-1)^i \frac{\partial u}{\partial r}$, $i = 1, 2$; 在 $\varphi = \varphi_i$ 上, 有 $(\text{grad} u) \cdot \mathbf{n} = \frac{(-1)^i}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$; $i = 1, 2$; 在 $\theta = \theta_i$ 上, 有 $(\text{grad} u) \cdot \mathbf{n} = \frac{(-1)^i}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$, $i = 1, 2$;

(2) 利用格林第一公式证明 Δu 在球坐标系下的表示式:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right].$$

向量场的环量和旋度

23.3.1 求下列向量场的旋度:

(1) $F = 2xy\mathbf{i} + e^z \sin y\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{k}$;

(2) $F = v \text{grad} u$, $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 连续可微.

23.3.2 证明:

- (1) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$;
- (2) $\operatorname{rot}(u\mathbf{F}) = u(\operatorname{rot} \mathbf{F}) + (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{F}$;
- (3) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{G})$.

23.3.3 如果 $\mathbf{F}$ 的旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ 在 Ω 内恒为零向量, 则称 $\mathbf{F}$ 是 Ω 内的无旋场. 证明下列场是它们的定义域内的无旋场:

- (1) $\mathbf{F} = \mathbf{r} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$;
- (2) $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}$ 如(1);
- (3) $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, $u = u(x, y, z) \in C^{(1)}$,

23.3.4 如果 $\mathbf{F}$ 的散度 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 在 Ω 内恒为零, 则称 $\mathbf{F}$ 是 Ω 内的无源场. 证明下列向量场 $\mathbf{F}$ 是无源场:

- (1) $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$;
- (2) $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$, 其中 $\mathbf{F}_1$ 与 $\mathbf{F}_2$ 为无旋场;
- (3) $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$, $\mathbf{r} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$;
- (4) $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u(x, y, z)$, 其中 $u(x, y, z)$ 是调和函数;
- (5) $\mathbf{F} = \operatorname{grad} (\ln r)$, 其中 $\mathbf{r}$ 同(3);
- (6) $\mathbf{F} = \frac{K\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{r}$ 同(3).

23.3.5 求向量场

沿曲线 C 的环量: $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

- (1) C 为 xy 平面上的圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, 逆时针方向;
- (2) C 为 xy 平面上的圆周 $(x - 2)^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, C 为逆时针方向;

(3) C 为 xy 平面上任一条分段光滑的简单闭曲线, 它围成的平面区域 Ω 的面积为 S . 证明 $\mathbf{F}$ 沿 C 的环量为 $2S$;

(4) 设有一平面 $\pi: ax + by + cz = d (c \neq 0)$. 取 π 为上侧. π 上有一分段光滑的简单闭曲线 C , 按定侧取正定向. C 围成的平

面区域的面积为 V 。问 F 沿 C 的环量是什么?

23.3.6 求向量场 $F = \text{grad}\left(\arctg \frac{y}{x}\right)$ 沿曲线 C 的环量: (1)

C 不环绕 z 轴; (2) C 环绕 z 轴一圈; (3) C 环绕 z 轴 n 圈。

23.3.7 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分:

(1) $\oint_C ay dx + bz dy + cx dz$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$x + y + z = 0$ 。若从 x 轴的正向看去, 这圆周依逆时针方向行进;

(2) $\oint_C (ay - bz) dx + (bz - cx) dy + (cx - ay) dz$, 其中 C 为

$x^2 + y^2 = R^2$ 与 $\frac{x}{l} + \frac{z}{h} = 1$ ($l > 0, h > 0$) 的交线, 从 x 轴正方向看去,

C 是顺时针方向;

(3) $\oint_C nx^{n-1} dx + e^{ny} dy + \cos nz dz$, n 为正整数, C 是椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$; 从 z 轴正方向看去为顺时针方向;

(4) $\oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$; 其中 C 是曲线

$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R, z > 0$), 此曲线是如下行进的: 由它所包围的在球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方。

23.3.8 设 $\Omega \subset R^3$ 是一平行六面体:

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

证明: $F = \text{rot} G$ 的充分必要条件是 $\text{div} F = 0$ 。

保守场与势函数

23.4.1 判别下列场是不是保守场, 或对什么区域来说是保守场:

(1) $F = \varphi(x)\mathbf{i} + \psi(y)\mathbf{j} + \chi(z)\mathbf{k}$, 其中 φ, ψ, χ 是连续函数;

(2) $F = \frac{1}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(3) $F = f(x + y + z)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), f(u)$ 是连续函数;

(4) $F = f(x^2 + y^2 + z^2)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), f(u)$ 同(3);

(5) $F = \frac{1}{1 + x^2 y^3 z^2}(yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$;

(6) $F = \frac{1}{x^2 + y^2}(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$.

23.4.2 验证下列场为保守场, 并求线积分:

(1) $F = (x^2 - 2yz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xz)\mathbf{j} + (z^2 - 2xy)\mathbf{k}$,

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} F \cdot d\mathbf{l};$$

(2) $F = (yze^{xyz} + 2x)\mathbf{i} + (zxe^{xyz} + 3y^2)\mathbf{j} + (xye^{xyz} + 4z^3)\mathbf{k}$,

$$\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} F \cdot d\mathbf{l};$$

(3) $F = [2x \sin(x + y + z) + x^2 \cos(x + y + z)]\mathbf{i} +$

$$x^2 \cos(x + y + z)(\mathbf{j} + \mathbf{k}), \int_{(1,2,3)}^{(x,y,z)} F \cdot d\mathbf{l}.$$

23.4.3 求原函数 u , 若

(1) $du = \frac{3x}{y^2} dx + \frac{y^2 - 2x^2}{y^3} dy$;

(2) $du = (x^2 y^3 + 3x^2 y) dx + (x^3 y^2 + x^3) dy$;

(3) $du = (e^x \sin y + 2xy^2) dx + (e^x \cos y + 2x^2 y) dy$;

(4) $du = \left[\frac{x}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{1}{x} + 2x^2 \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{y}{(x^2 - y^2)^2} + 3y^3 \right] dy +$

$5z^3 dz$;

(5) $du = (4x^3 y^3 - 3y^2 + 5) dx + (3x^4 y^2 - 6xy - 4) dy$.

23.4.4 对下列各微分式判定原函数是否存在, 如存在, 求出原函数:

$$(1) (10xy - 8y) dx + (5x^2 - 8x + 3) dy;$$

$$(2) (4x^3y^3 - 2y^2) dx + (3x^4y^2 - 2xy) dy;$$

$$(3) [(x+y+1)e^x - e^y] dx + [e^x - (x+y+1)e^y] dy.$$

23.4.5 函数 $F(x, y)$ 应满足什么条件才能使微分式

$$F(x, y)(x dx + y dy)$$

是全微分

* * *

23.1 设 R^3 空间有一变换 $T: x_i = x_i(p_1, p_2, p_3), i = 1, 2, 3$.

记为 $x = T(p)$. 又设 $\frac{\partial x}{\partial p_1}, \frac{\partial x}{\partial p_2}, \frac{\partial x}{\partial p_3}$ 两两互相垂直.

$$(1) \text{ 证明: } \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = \sqrt{e_1 e_2 e_3}, \text{ 其中 } e_i = \left\| \frac{\partial x}{\partial p_i} \right\|^2;$$

$$(2) \text{ 证明: } \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{1}{e_i} \frac{\partial x_k}{\partial p_i};$$

(3) 利用格林第一公式和高斯公式, 导出在 $p_1 p_2 p_3$ 坐标系下 Δu 的表示式

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{e_1 e_2 e_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\sqrt{\frac{e_2 e_3}{e_1}} \frac{\partial u}{\partial p_1} \right) + \frac{\partial}{\partial p_2} \left(\sqrt{\frac{e_3 e_1}{e_2}} \frac{\partial u}{\partial p_2} \right) + \frac{\partial}{\partial p_3} \left(\sqrt{\frac{e_1 e_2}{e_3}} \frac{\partial u}{\partial p_3} \right) \right\}.$$

提示: 在格林第一公式中, 令 v 是在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上取值为零且 Ω 上有连续二阶偏导数的函数.

23.2 设 S 是一椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 令 p 为椭球中心到

S 上一点 $P(x, y, z)$ 的切平面的距离. 证明:

$$(1) \int_S p dS = 4\pi abc;$$

$$(2) \int_S \frac{1}{p} dS = \frac{4\pi}{3abc} (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2).$$

23.3 设 S 是光滑曲面, 边界为 Γ . 令

$$F(a, b, c) = \iint_S \frac{(a-x) dy dz + (b-y) dz dx + (c-z) dx dy}{r^2}$$

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2.$$

证明: $F(a, b, c)$ 的偏导数存在, 且有表示式

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \int_{\Gamma} \frac{(z-c) dy - (y-b) dz}{r^3},$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \int_{\Gamma} \frac{(x-a) dz - (z-c) dx}{r^3},$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \int_{\Gamma} \frac{(y-b) dx - (x-a) dy}{r^3}.$$

23.4 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数. 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$

$\neq 0$, 证明变换 $u = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, v = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, w = -z + x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 有逆变换, 它的形式为

$$x = \frac{\partial g(u, v)}{\partial u}, y = \frac{\partial g(u, v)}{\partial v}, z = -w + u \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} + v \frac{\partial g(u, v)}{\partial v}.$$

23.5 求一向量场 F , 使 F 的旋度为引力场 G :

$$G = \frac{1}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

23.6 设 f_1, f_2, f_3 是 x_0, x_1, x_2 和 x_3 的函数, 有二阶连续偏导数. 令 $f = (f_1, f_2, f_3)^T, x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, 则有向量函数表示式 $f(x)$. 记 $Df(x)$ 中去掉 j 列元素构成的矩阵为 D_j .

(1) 证明 $\sum_{j=0}^3 (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_j} (\det D_j) = 0$;

(2) 设 $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. 令

$$F(x_0) = \iiint_B (\det D_0) dx_1 dx_2 dx_3.$$

证明 $F(x_0)$ 可微, 而且有

$$F'(x_0) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{j+1} \int_{\partial B^+} x_j (\det D_j) dS.$$

∂B^+ 表取 ∂B 的外法线方向;

(3) 如果 $\det D_j (j=1, 2, 3)$ 在 ∂B 上恒为零, 证明 $F(x_0) \equiv \text{常数}$.

第二十四章^① 微分形式与斯托克斯公式

微分形式的定义

24.2.1 设 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

(1) 求 $\omega \wedge \omega$;

(2) 求证: 不存在两个一次形式 α, β , 使 $\alpha \wedge \beta = \omega$.

24.2.2 设 $\alpha = x_1 dx_2 + x_2 dx_3 + x_3 dx_1$,

$$\eta = x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_3 + x_3 x_1 dx_3 \wedge dx_1,$$

(1) 求 $\alpha \wedge \eta$;

(2) 求 $\eta \wedge \alpha$;

(3) $\alpha \wedge \eta$ 是否与 $\eta \wedge \alpha$ 相同? 为什么?

外 微 分

24.2.3 设 $\omega = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$, $a_{ij} + a_{ji} = 0$. 求证:

$$d\omega = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

24.2.4 设 $\omega = p(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$, 而

^① 本章习题是教材第三册附录中 §2, §3 的习题。——

且 $d\omega=0$. 证明: $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

24.2.5 寻找一个 $(n-1)$ 次形式 η , 使得

$$d\eta = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

24.2.6 设 $\omega = yzdy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$.

(1) 证明 ω 是闭形式;

(2) 求一次形式 η , 使 $d\eta = \omega$.

微分形式的变量替换

24.3.1 设

$$\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3,$$

$$\eta = b_3(x)dx_1 \wedge dx_2 + b_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + b_1(x)dx_2 \wedge dx_3,$$

$$x = \varphi(u), \Omega \subset R^3 \rightarrow \Omega' \subset R^3.$$

求证:

$$(1) \varphi^*\omega = \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 a_i(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right] du_j;$$

$$(2) \varphi^*\eta = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \begin{vmatrix} b_1 \circ \varphi & b_2 \circ \varphi & b_3 \circ \varphi \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_i} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_j} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_j} \end{vmatrix} du_i \wedge du_j;$$

$$(3) \varphi^*[\omega \wedge \eta]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^3 a_i(\varphi(u)) b_i(\varphi(u)) \right) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3;$$

$$(4) \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta = \varphi^*[\omega \wedge \eta].$$